岐阜大学

2016年 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ xy 平面上に，直線 $\ell : y = -x-2$ と点 A(1, 1) がある．点 A からの距離と直線 ℓ からの距離が等しい点の軌跡を曲線 C とする．以下の問に答えよ．

(1) 曲線 C の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C と x 軸の共有点の座標を求めよ．

(3) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) C上の任意の点をP(x, y)とおくと

$$AP = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

ℓ からのキョリは．$\ell: x+y+2=0$，P(x, y)に点と直線のキョリ公式を適用して，

$$d = \frac{|x+y+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$\therefore AP^2 = d^2$ より，$2\{(x-1)^2+(y-1)^2\} = (x+y+2)^2$

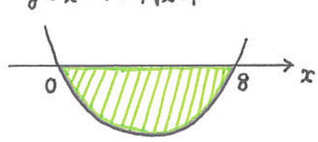
$\therefore \underline{x^2+y^2-2xy-8x-8y=0}$ // 逆にこの曲線上の任意の点は条件をみたす．

(2) (1)で求めた方程式に $y=0$ を代入して，

$x^2-8x=0$

$\therefore x(x-8)=0$ $\therefore x=0, 8$

共有点は $\underline{(0, 0), (8, 0)}$ //



(3) (1)より，$y^2-2(x+4)y+x^2-8x=0$

$\therefore y = x+4 \pm 4\sqrt{x+1}$

$0 \leqq x \leqq 8$ において，$x+4-4\sqrt{x+1} = \dfrac{(x+4)^2-4^2(x+1)}{x+4+4\sqrt{x+1}}$

$$= \frac{x(x-8)}{x+4+4\sqrt{x+1}}$$

$$\leqq 0$$

$$\therefore S = \int_0^8 -(x+4-4\sqrt{x+1})\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2-4x+\frac{8}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^8$$

$$= -32-32+72-\frac{8}{3}$$

$$= \underline{\frac{16}{3}}$$ //