岐阜大学

2017 年 第 3 問

$\boxed{3}$ n を 3 以上の整数とする．半径 1 の円に内接する正 n 角形の面積を I_n，外接する正 n 角形の面積を E_n とする．m を正の整数とし，$a_m = \cos\left(\dfrac{\pi}{3\cdot 2^m}\right)$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $a_2 = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ が成り立つことを示せ．

(2) I_n と E_n を，n と三角比を用いて表せ．

(3) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3\cdot 2^m}\right)$ と $\tan\left(\dfrac{\pi}{3\cdot 2^m}\right)$ を，a_m を用いて表せ．

(4) 面積の比較により $\pi > I_n$ および $\pi < E_n$ となることを用いて，

$$3\cdot 2^m\sqrt{1-{a_m}^2} < \pi < 3\cdot 2^m\frac{\sqrt{1-{a_m}^2}}{a_m}$$

が成り立つことを示せ．

(5) (4) を用いて，

$$3(\sqrt{6}-\sqrt{2}) < \pi < 12(2-\sqrt{3})$$

が成り立つことを示せ．