0001834545618999

岐阜大学

2014年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 2014^{10} に関して，以下の問に答えよ．ただし，必要ならば $7^9 = 40353607$ および $7^{10} = 282475249$ を用いてよい．

(1) 2014^{10} の十の位の数字を求めよ．

(2) 2014^{10} の十万の位の数字を求めよ．

(3) 2014^{10} の上3桁の数字を求めよ．

(1) $(2000+14)^{10} = \left(\sum_{k=1}^{10} \underbrace{2000^k \cdot 14^{10-k} \cdot {}_{10}C_k}_{}\right) + 14^{10}$ （二項定理より）

${}_{10}C_k$ は整数なので，10^3 の倍数

よって，2014^{10} の十の位の数字は，$14^{10} = 2^{10} \cdot 7^{10}$ の十の位の数字に等しい．

$$\begin{array}{r} 282475249 \\ 1024 \\ \hline 1129900996 \\ 564950498 \\ 282475249 \\ \hline 289254654976 \end{array}$$

左の筆算の結果より，$\underline{7}$ //

← 全部計算する必要はない

(2) $(2000+14)^{10} = \left(\sum_{k=2}^{10} \underbrace{2000^k \cdot 14^{10-k} \cdot {}_{10}C_k}_{}\right) + 2000 \cdot 14^9 \cdot {}_{10}C_1 + 14^{10}$

10^6 の倍数

よって，2014^{10} の十万の位の数字は，$2000 \cdot 14^9 \cdot {}_{10}C_1 + 14^{10} = 2^{10} \cdot 7^9 \cdot 10^4 + 2^{10} \cdot 7^{10}$

の十万の位の数字に等しい．

$$\begin{array}{r} 40353607 \times 10^4 \\ 1024 \\ \hline \cdots 14428 \\ \cdots 7214 \\ \cdots 07 \\ \hline \cdots 93568\ 0000 \end{array}$$

よって，(1)の結果を足して，

$$\begin{array}{r} 5680000 \\ +\ 4654976 \\ \hline 10334976 \end{array}$$

∴ 求める数字は $\underline{3}$ //

(3) $(2000+14)^{10} = \underbrace{2000^{10}}_{2^{10}\cdot 10^{30}} + \underbrace{2000^9 \cdot 14 \cdot 10}_{2^{10}\cdot 7 \cdot 10^{28}} + \underbrace{2000^8 \cdot 14^2 \cdot {}_{10}C_2}_{2^{10}\cdot 7^2 \cdot 10^{24} \cdot 45} + \underbrace{(\text{他の項})}_{\text{それ以下の桁}}$

∴ 34桁　∴ 32桁　∴ 31桁

↑ 厳密には示した方が良いが今回はなくても問題ないと判断した．

∴ 上3桁は，

$$\begin{array}{r} 1024 \\ +\ \ 71 \\ \hline 1095 \end{array}$$

より，$\underline{109}$ //