2016年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 数列 $\{r_n\}$ を初項 $r_1=1$，公差1の等差数列とする．また，数列 $\{a_n\}$ を次の式で定める．

$$a_n = {r_n}^2 + \frac{1}{4} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

以下の問に答えよ．

(1) 一般項 a_n を求めよ．
(2) 円 $C_n : x^2+(y-a_n)^2={r_n}^2$ と放物線 $P : y=x^2$ の共有点の座標を求めよ．
(3) 円 C_n と円 C_{n+1} の共有点 $(x_n,\ y_n)$ の座標を求めよ．
(4) 円 C_1，C_2，C_3 と放物線 P の概形を描け．

(1) $r_n = n$ より，$\underline{a_n = n^2+\frac{1}{4}}$ //

(2) $C_n : x^2+\left\{y-\left(n^2+\frac{1}{4}\right)\right\}^2 = n^2 \quad \cdots ①$

これに $y=x^2$ を代入して展開すると，

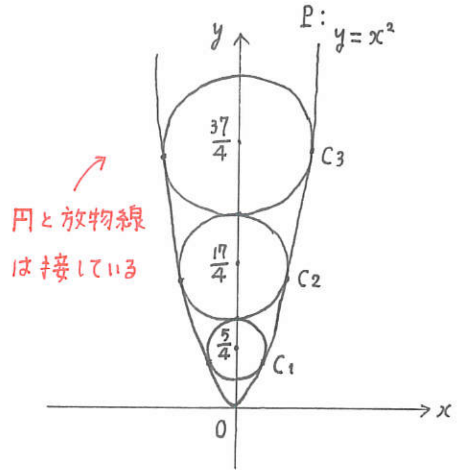
$$x^2+x^4-\left(2n^2+\frac{1}{2}\right)x^2+n^4+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{16}-n^2=0$$

$$\therefore\ x^4-2\left(n^2-\frac{1}{4}\right)x^2+\left(n^2-\frac{1}{4}\right)^2=0$$

$$\left\{x^2-\left(n^2-\frac{1}{4}\right)\right\}^2=0$$

$$\therefore\ x^2=n^2-\frac{1}{4} \qquad \therefore\ x=\pm\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2}$$

$\therefore$ 共有点は $\underline{\left(\pm\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2},\ n^2-\frac{1}{4}\right)}$ //



(3) $C_{n+1} : x^2+\left\{y-\left(n^2+2n+\frac{5}{4}\right)\right\}^2 = n^2+2n+1 \quad \cdots ②$

①−②より，整理すると，$2(2n+1)\left\{y-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right\}=0$

n は自然数より $2n+1>0$ であるから $y=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$ ①に代入して $x=0$

$\therefore\ \underline{(x_n,\ y_n)=\left(0,\ \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)}$ //

(4) $C_1 : x^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=1$ 　C_1 と P の共有点は $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{4}\right)$

$C_2 : x^2+\left(y-\frac{17}{4}\right)^2=4$ 　C_2 と P の共有点は $\left(\pm\frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{15}{4}\right)$

$C_3 : x^2+\left(y-\frac{37}{4}\right)^2=9$ 　C_3 と P の共有点は $\left(\pm\frac{\sqrt{35}}{2},\ \frac{35}{4}\right)$

$\therefore$ 右上の図のようになる．