岐阜大学

2014年 第5問　1枚目／3枚

数理 石井K

5　n を正の整数とし，$x \geqq 0$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $r_n(x) = e^x - \left(1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n\right)$ とする．$r_n(x) \geqq 0$ を n に関する数学的帰納法を使って示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ を示せ．

(3) $t \geqq 0$ とし，$f(t) = \displaystyle\int_0^t x^n e^{-x}\,dx$ とする．$\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)$ を求めよ．

(1) $r_n(x) \geqq 0$ を数学的帰納法で示す.

(i) $n=1$ のとき.

$r_1(x) = e^x - (1+x)$

$\therefore\ r_1'(x) = e^x - 1 \geqq 0$ （$\because\ x \geqq 0$ より）

$\therefore\ r_1(x)$ は $x \geqq 0$ において単調増加であり，$r_1(x) \geqq r_1(0) = 0$

$\therefore\ n=1$ のときは成り立つ.

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると，$x \geqq 0$ に対して.

$r_k(x) = e^x - \left(1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{1}{k!}x^k\right) \geqq 0$ $\cdots$① が成り立つ

このとき. $r_{k+1}(x) = e^x - \left(1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{1}{k!}x^k + \dfrac{1}{(k+1)!}x^{k+1}\right)$

$$\therefore\ r_{k+1}'(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}x^{k-1} + \frac{1}{k!}x^k\right)$$

$$= r_k(x)$$

$$\geqq 0 \quad (\because ①\ より)$$

$\therefore\ r_{k+1}(x)$ は. $x \geqq 0$ において単調増加であり. $r_{k+1}(x) \geqq r_{k+1}(0) = 0$

$\therefore\ n = k+1$ のとき成立する.

(i), (ii) より. すべての正の整数 n について. $x \geqq 0$ において，$r_n(x) \geqq 0$ が成立する ▨

(2) (1) より. $x \geqq 0$ において.

$$e^x \geqq 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\therefore\ e^{-x} \leqq \frac{1}{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}} \quad \cdots ②$$

2014年 第5問　2枚目／3枚

数理 石井K

5 nを正の整数とし，$x \geqq 0$とする．以下の問に答えよ．

(1) $r_n(x) = e^x - \left(1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n\right)$とする．$r_n(x) \geqq 0$を$n$に関する数学的帰納法を使って示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$を示せ．

(3) $t \geqq 0$とし，$f(t) = \displaystyle\int_0^t x^n e^{-x}\,dx$とする．$\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)$を求めよ．

(2)のつづき

$x \geqq 0$のとき，$x^n e^{-x} \geqq 0$であることと②の両辺に$x^n(\geqq 0)$をかけることにより，

$$0 \leqq x^n e^{-x} \leqq \frac{x^n}{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}}$$

$x \to \infty$のとき，(右辺)$\to 0$であるから，はさみうちの原理により，

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0 \quad ▨$$

(3) $I_n = \displaystyle\int_0^t x^n e^{-x}\,dx$とおくと，

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^t x^n (-e^{-x})'\,dx \\ &= \left[-x^n e^{-x}\right]_0^t + \int_0^t n x^{n-1} e^{-x}\,dx \\ &= -t^n e^{-t} + n I_{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{I_n}{n!} - \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{-t^n e^{-t}}{n!}$$

$$\therefore \frac{I_n}{n!} = \frac{I_1}{1!} - \sum_{k=2}^{n} \frac{t^k e^{-t}}{k!} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \quad \cdots ③$$

ここで，
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^t x(-e^{-x})'\,dx \\ &= \left[-xe^{-x}\right]_0^t + \int_0^t e^{-x}\,dx \\ &= -te^{-t} + \left[-e^{-x}\right]_0^t \\ &= -(t+1)e^{-t} + 1 \end{aligned}$$

よって，③より，
$$\frac{I_n}{n!} = 1 - (t+1)e^{-t} - \sum_{k=2}^{n} \frac{t^k e^{-t}}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k e^{-t}}{k!} \quad \cdots ④$$

2014年 第5問　　3枚目／3枚

$\boxed{5}$ n を正の整数とし，$x \geqq 0$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $r_n(x) = e^x - \left(1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n\right)$ とする．$r_n(x) \geqq 0$ を n に関する数学的帰納法を使って示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ を示せ．

(3) $t \geqq 0$ とし，$f(t) = \displaystyle\int_0^t x^n e^{-x}\,dx$ とする．$\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)$ を求めよ．

(3) のつづき．

④より．

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} I_n$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(n! - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!\,t^k e^{-t}}{k!}}_{(2)\text{より}\ \to 0}\right)$$

$$= \underline{n!}\ //$$