岐阜大学

2015年 第5問

数理 石井K

5 p を2以上の整数とし，$a=p+\sqrt{p^2-1}$，$b=p-\sqrt{p^2-1}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) a^2+b^2 と a^3+b^3 がともに偶数であることを示せ．

(2) n を2以上の整数とする．a^n+b^n が偶数であることを示せ．

(3) 正の整数 n について，$[a^n]$ が奇数であることを示せ．ただし，実数 x に対して，$[x]$ は $m \leqq x < m+1$ を満たす整数 m を表す．

(1) $a+b=2p$，$ab=1$

$\therefore\ a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4p^2-2=2(2p^2-1)$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=8p^3-6p=2(4p^3-3p)$

$\therefore$ p は整数であることより，a^2+b^2，a^3+b^3 はともに偶数である ▨

(2) 数学的帰納法により示す．

(i) $n=2, 3$ のとき，(1)で既に示した．

(ii) $n=k, k+1$ のとき成り立つと仮定する．

a^k+b^k，$a^{k+1}+b^{k+1}$ はともに偶数である．…①

このとき，$a^{k+2}+b^{k+2}=(a+b)(a^{k+1}+b^{k+1})-ab^{k+1}-a^{k+1}b$

$=2p(a^{k+1}+b^{k+1})-ab(a^k+b^k)$

$=2p(a^{k+1}+b^{k+1})-(a^k+b^k)$

よって①より，$a^{k+2}+b^{k+2}$ は偶数である．$\therefore$ $n=k+2$ のとき成り立つ

(i),(ii)より，2以上の整数 n について，a^n+b^n が偶数であることが示された ▨

(3) $b=p-\sqrt{p^2-1}$

$=\dfrac{(p-\sqrt{p^2-1})(p+\sqrt{p^2-1})}{p+\sqrt{p^2-1}}$

$=\dfrac{1}{p+\sqrt{p^2-1}}$

<1 （$\because$ p は2以上であるから）

$\therefore$ $0<b<1$ より，$0<b^n<1$ …②

また，(2)より，$a^n+b^n=2C_n$ $(n \geqq 1)$ とおける． n=1のとき $a+b=2p$ より $C_1=p$ とすれば成立する．

C_n は整数である

$\therefore$ $b^n=2C_n-a^n$ として②に代入すると，

$0<2C_n-a^n<1$

$\therefore$ $2C_n-1<a^n<2C_n$

$\therefore$ $[x]$ の定義より，$[a^n]=2C_n-1$

$\therefore$ $[a^n]$ は奇数である ▨