岐阜大学

2015年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ $m>1$ とし，連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2 \\ (y-2mx)(y+2mx-3m^2) \leqq 0 \end{cases}$$

の表す領域を D とする．以下の問に答えよ．

(1) $y=x^2$ と $y=-2mx+3m^2$ の共有点を求めよ．

(2) 領域 D を図示せよ．

(3) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が D 内を動くとき，$2y-x$ の最大値と最小値を求めよ．

(4) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が D 内を動くとき，$2y-6mx$ の最大値と最小値を求めよ．

(1) $x^2+2mx-3m^2=0$

$\Longleftrightarrow (x+3m)(x-m)=0$

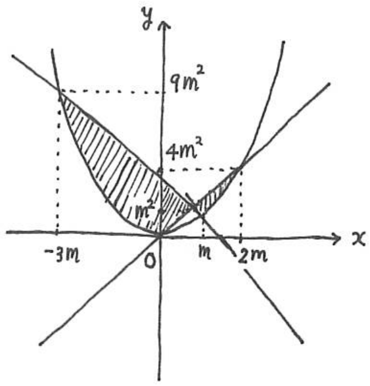
$\therefore x=-3m,\ m$

共有点は $\underline{(-3m,\ 9m^2),\ (m,\ m^2)}$ //

(2) $y=x^2$ と $y=2mx$ の共有点は $(0,0),\ (2m,\ 4m^2)$

$y=2mx$ と $y=-2mx+3m^2$ の共有点は $\left(\frac{3m}{4},\ \frac{3m^2}{2}\right)$

∴ 右図の斜線部分(ただし境界線も含む)



(3) $2y-x=k$ とおくと，$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k$

∴ この直線が D と共有点をもつとき，k の最大値は，

$(-3m,\ 9m^2)$ を通るときで最小値は $(0,0)$ を通るとき

∴ $\underline{最大値\ 18m^2+3m,\ 最小値\ 0}$ //

(4) $2y-6mx=k$ とおくと，$y=3mx+\frac{k}{2}$

(3)と同様に考えると，最大となるのは $(-3m,\ 9m^2)$ を通るとき

最小となる候補は，$y=x^2$ に接するときと，$\left(\frac{3}{4}m,\ \frac{3}{2}m^2\right)$ を通るとき

(i) $y=x^2$ と接するときは，$k=-\frac{9}{2}m^2$

(ii) $\left(\frac{3}{4}m,\ \frac{3}{2}m^2\right)$ を通るときは，$k=-\frac{3}{2}m^2$

∴ $\underline{最大値\ 36m^2,\ 最小値\ -\frac{9}{2}m^2}$ //