



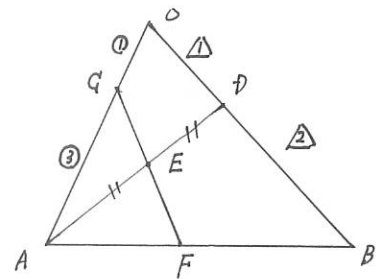
2016年第5問

5 $\triangle OAB$ において、辺 OA を $1:3$ に内分する点を C 、辺 OB を $1:2$ に内分する点を D 、線分 AD の中点を E とする。 $\vec{OA} = \vec{a}$ 、 $\vec{OB} = \vec{b}$ とする。以下の間に答えよ。

- (1) \vec{CE} を \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。
- (2) 直線 CE と辺 AB の交点を F とする。 \vec{CF} を \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。
- (3) 辺 AB を $7:1$ に外分する点を G とする。 \vec{EG} を \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。
- (4) 内積 $\vec{CE} \cdot \vec{EG}$ を \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。
- (5) $\triangle OAB$ を $OA = OB$ となる直角二等辺三角形とすると、 $\angle CEG$ の大きさを求めよ。

$$(1) \vec{OC} = \frac{1}{4} \vec{a}, \quad \vec{OE} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OD}) = \frac{1}{2} (\vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b}) = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{CE} &= \vec{OE} - \vec{OC} \\ &= \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b} - \frac{1}{4} \vec{a} \\ &= \frac{1}{4} \vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b} \end{aligned}$$

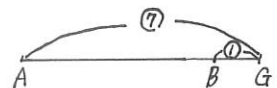


$$(2) \vec{CF} = k \vec{CE} \quad (k: \text{実数}) \text{ と表せるので, } \vec{CF} = \frac{k}{4} \vec{a} + \frac{k}{6} \vec{b}$$

$$\vec{OF} = \vec{CF} + \vec{OC} = \frac{k+1}{4} \vec{a} + \frac{k}{6} \vec{b}$$

$$F \text{ は辺 } AB \text{ 上にあり, } \frac{k+1}{4} + \frac{k}{6} = 1 \quad \therefore k = \frac{9}{5}$$

$$\therefore \vec{CF} = \frac{9}{20} \vec{a} + \frac{3}{10} \vec{b}$$



$$(3) \vec{AG} = \frac{7}{6} \vec{AB} = \frac{7}{6} (\vec{b} - \vec{a})$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{EG} &= \vec{CG} - \vec{CE} \\ &= \vec{AG} - \vec{AC} - \vec{CE} \\ &= \frac{7}{6} (\vec{b} - \vec{a}) + \frac{3}{4} \vec{a} - (\frac{1}{4} \vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b}) \\ &= -\frac{2}{3} \vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \vec{CE} \cdot \vec{EG} &= (\frac{1}{4} \vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b}) \cdot (-\frac{2}{3} \vec{a} + \vec{b}) \\ &= -\frac{1}{6} |\vec{a}|^2 + \frac{5}{36} \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{6} |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

$$(5) |\vec{a}| = |\vec{b}| \text{ かつ } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ のときである}$$

から (4) より

$$\vec{CE} \cdot \vec{EG} = 0$$

$\therefore CE \perp EG$

$$\therefore \angle CEG = 90^\circ$$