0002199540087999

岐阜大学

2016年第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき，以下の問に答えよ．

(1) θ の方程式 $\cos 3\theta+\cos\theta=0$ を解け．

(2) k を正の整数とする．θ の方程式

$$\cos 3\theta-k\cos\theta=0$$

が解をもつ k を求めよ．また，そのときの解 θ を求めよ．

(3) m と n を正の整数とする．θ の方程式

$$m\cos\theta-3\cos 3\theta+n(1+\cos 2\theta)=0$$

が解をもつ m，n の組 $(m,\ n)$ を求めよ．また，そのときの解 θ を求めよ．

(1) $\cos 3\theta+\cos\theta=0 \iff 4\cos^3\theta-3\cos\theta+\cos\theta=0$

$\iff 4\cos\theta\left(\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$

$\iff \cos\theta=0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ より，$\underline{\theta=\pm\frac{\pi}{4}}$ //

(2) $\cos 3\theta-k\cos\theta=0 \iff 4\cos^3\theta-3\cos\theta-k\cos\theta=0$

$\iff 4\cos\theta\left(\cos\theta+\frac{\sqrt{k+3}}{2}\right)\left(\cos\theta-\frac{\sqrt{k+3}}{2}\right)=0$ （$\because k>0$ より）

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ より，$\cos\theta>0$ であるから，解をもつための必要十分条件は，$\frac{\sqrt{k+3}}{2}\leqq 1$

よって，$k\leqq 1$ となり，k は正の整数より，$\underline{k=1}$ //

このとき，$\cos\theta=\pm 1$ となり，$\underline{\theta=0}$ //

(3) (与式) $\iff m\cos\theta-3(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+n(1+2\cos^2\theta-1)=0$

$\iff 12\cos^3\theta-2n\cos^2\theta-(m+9)\cos\theta=0$

$\iff \cos\theta(12\cos^2\theta-2n\cos\theta-m-9)=0$

つまり，
$f(t)=12t^2-2nt-m-9$

$\cos\theta>0$ より，$12\cos^2\theta-2n\cos\theta-m-9=0$　この左辺において，$\cos\theta=t$ とおいたものを $f(t)$ とすると

$f(t)=0$ が $0<t\leqq 1$ に実数解をもてばよい．$f(0)=-m-9<0$（$\because m>0$ より）であるから

$f(1)\geqq 0$ となればよい　$\therefore 12-2n-m-9\geqq 0 \iff 2n+m\leqq 3$

m,n は正の整数より，$\underline{m=n=1}$ //　そのとき $f(1)=0$　$\therefore \cos\theta=1$　$\therefore \underline{\theta=0}$ //