# 岐阜大学

2016年第4問　　1枚目／3枚　　数理 石井K

$\boxed{4}$ $n$ を正の整数とする．$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot 2^k}$ とおく．以下の問に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．

(1) $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$ を数学的帰納法を用いて証明せよ．ただし，$x \neq 1$ とする．

(2) $\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})\,dx = \log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$ を示せ．

(3) $S_n = \log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$ を示せ．

(4) $0 \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx \leqq \frac{1}{2^n}\log 2$ を示せ．

(5) $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \cdots$ の値を求めよ．

(1) 数学的帰納法により証明する．

(i) $n=1$ のとき．(左辺)$=1$，(右辺)$= \frac{1-x}{1-x} = 1$　∴ $n=1$ のとき成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると．

$$1+x+x^2+\cdots+x^{k-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^k}{1-x} \quad \cdots (*)$$

(*)の両辺に $x^k$ を加えて．

$$1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}+x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{x^k}{1-x} + x^k$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{x^k(1-(1-x))}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{x^{k+1}}{1-x}$$

∴ $n=k+1$ のときも成り立つ．

(i),(ii)より．すべての正の整数 $n$ について．与式は成り立つ ▨

(2) (1)より．

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{1}{x-1}\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$$

$$= \left[-\log|x-1|\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$$

$$= \log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$$

▨

2枚目へつづく

2016年 第4問　　2枚目／3枚　　数理 石井K

$\boxed{4}$ $n$ を正の整数とする．$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot 2^k}$ とおく．以下の問に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．

(1) $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$ を数学的帰納法を用いて証明せよ．ただし，$x \neq 1$ とする．

(2) $\int_0^{\frac{1}{2}} (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})\, dx = \log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx$ を示せ．

(3) $S_n = \log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx$ を示せ．

(4) $0 \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx \leqq \frac{1}{2^n} \log 2$ を示せ．

(5) $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \cdots$ の値を求めよ．

(3)
$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}\,dx$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{k-1}\,dx$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} x^k\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot 2^k}$$
$$= S_n$$

よって，(2)より，$S_n = \log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$ ▨

(4) $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ において，$x^n \geqq 0$，$1-x > 0$ より，$0 \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$

$\frac{x^n}{1-x} \geqq 0$ なので

一方，$\frac{x^n}{1-x} \leqq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-x}$ であるから，

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1-x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2^n} \Big[-\log|1-x|\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2^n} \log 2$$

以上をあわせて，$0 \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx \leqq \frac{1}{2^n} \log 2$ ▨

3枚目へつづく

2016年 第4問　　3枚目/3枚．

数理 石井K

$\boxed{4}$ $n$ を正の整数とする．$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot 2^k}$ とおく．以下の問に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．

(1) $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}$ を数学的帰納法を用いて証明せよ．ただし，$x \neq 1$ とする．

(2) $\int_0^{\frac{1}{2}}(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})\,dx=\log 2-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\,dx$ を示せ．

(3) $S_n=\log 2-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\,dx$ を示せ．

(4) $0 \leqq \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\,dx \leqq \frac{1}{2^n}\log 2$ を示せ．

(5) $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\cdots$ の値を求めよ．

(5) (3), (4) より．

$$\log 2-\frac{1}{2^n}\log 2 \leqq S_n \leqq \log 2$$

$n\to\infty$ のとき，$\frac{1}{2^n}\log 2 \to 0$ であるから．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log 2-\frac{1}{2^n}\log 2\right)=\log 2,$$

よって，はさみうちの原理より．

$$\underline{\lim_{n\to\infty}S_n=\log 2}$$ //