



2017年第3問

3 n を 3 以上の整数とする. 半径 1 の円に内接する正 n 角形の面積を I_n , 外接する正 n 角形の面積を E_n とする. m を正の整数とし, $a_m = \cos\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^m}\right)$ とおく. 以下の問に答えよ.

(1) $a_2 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ が成り立つことを示せ.

(2) I_n と E_n を, n と三角比を用いて表せ.

(3) $\sin\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^m}\right)$ と $\tan\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^m}\right)$ を, a_m を用いて表せ.

(4) 面積の比較により $\pi > I_n$ および $\pi < E_n$ となることを用いて,

$$3 \cdot 2^m \sqrt{1 - a_m^2} < \pi < 3 \cdot 2^m \frac{\sqrt{1 - a_m^2}}{a_m}$$

が成り立つことを示せ.

(5) (4) を用いて,

$$3(\sqrt{6} - \sqrt{2}) < \pi < 12(2 - \sqrt{3})$$

が成り立つことを示せ.