



2014年第4問

4 次の問に答えよ。

(1)  $a, b > 0$ とする。このとき

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

であることを証明せよ。また、等号が成立するのは  $a = b$  の場合だけであることを示せ。(2)  $a, b, c > 0$ とする。このとき

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

であることを証明せよ。また、等号が成立するのはどのような場合か述べよ。

(3)  $\alpha, \beta, \gamma$ を三角形の3辺の長さとする。このとき

$$\alpha\beta\gamma \geq (-\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)$$

であることを証明せよ。また、等号が成立するのは正三角形の場合だけであることを示せ。

(4)  $\alpha, \beta, \gamma$ を三角形の3辺の長さとする。このとき

$$\frac{\alpha}{-\alpha + \beta + \gamma} + \frac{\beta}{\alpha - \beta + \gamma} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta - \gamma} \geq 3$$

であることを証明せよ。また、等号が成立するのは正三角形の場合だけであることを示せ。