



2011年第3問

3 平面上に点  $O$  を中心とする半径 1 の円  $S$  と  $S$  に内接する正三角形  $ABC$  がある。以下の問に答えよ。

- (1) 内積  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$  の値を求めよ。  
(2)  $\vec{OC}$  を  $\vec{OA}$  と  $\vec{OB}$  を用いて表せ。  
(3) 平面上の任意の点  $P$  に対して、以下の不等式が成り立つことを示せ。

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 \geq 3$$

また、等号が成り立つのはどのようなときか答えよ。

- (4) 円  $S$  の周上の任意の点  $Q$  に対して、

$$(\vec{OA} \cdot \vec{OQ})^2 + (\vec{OB} \cdot \vec{OQ})^2 + (\vec{OC} \cdot \vec{OQ})^2 = \frac{3}{2}$$

となることを示せ。

- (5) 円  $S$  の周上の任意の点  $Q$  に対して、

$$AQ^4 + BQ^4 + CQ^4$$

の値を求めよ。