



2012年理学部第3問

3 数列  $\{a_n\}$  を  $a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n e^{-t} dt$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) と定義する。ただし、 $e$  は自然対数の底とする。次の各問に答えよ。

- (1)  $a_1$  を求めよ。
- (2)  $0 \leq t \leq 1$  のとき  $t^n \leq t$  であることを用いて  $a_n \leq \frac{a_1}{n!}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を示せ。
- (3) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。
- (4)  $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{e(n+1)!}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を示せ。
- (5) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$  を求めよ。