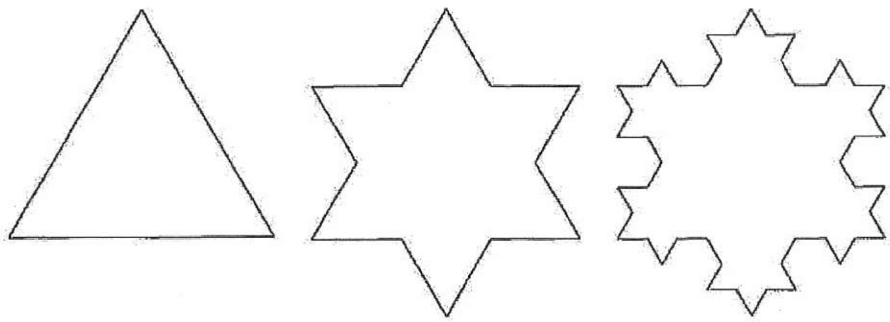
0001674095238999

日本女子大学

2013年 理学部 第1問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 下の図のように，F_1 を1辺の長さが1の正三角形とする．F_1 の3つの辺のそれぞれを3等分し3つの線分に分ける．この3つの線分の中央の線分に，その線分を1辺とする正三角形を F_1 の外側に追加して得られる多角形を F_2 とする．次に，F_2 の12個の辺のそれぞれを3等分し3つの線分に分ける．この3つの線分の中央の線分に，その線分を1辺とする正三角形を F_2 の外側に追加して得られる多角形を F_3 とする．以下同様にして，F_4，F_5，F_6，$\cdots$ を作るものとする．F_n の辺の個数を K_n，周の長さを L_n，面積を S_n とする．



F_1　　F_2　　F_3

(1) K_n $(n \geqq 1)$ を求めよ．
(2) L_n $(n \geqq 1)$ を求めよ．
(3) S_1 と $S_n - S_{n-1}$ $(n \geqq 2)$ を求めよ．
(4) S_n $(n \geqq 1)$ を求めよ．
(5) 数列 $\{L_n\}$ の極限を調べよ．
(6) 数列 $\{S_n\}$ の極限を調べよ．

(1) 1つの辺に注目して考える

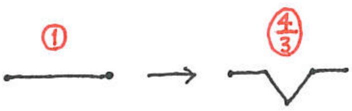
よって辺の個数は4倍になる

全体でも4倍になるので，$K_{n+1} = 4K_n$

$\therefore$ 数列 $\{K_n\}$ は初項 $K_1 = 3$，公比4の等比数列

$\therefore$ $\underline{K_n = 3 \cdot 4^{n-1}}$ //

(2) (1)と同様に1つの辺に注目すると．



長さは $\frac{4}{3}$ 倍になる．

$\therefore$ $L_{n+1} = \frac{4}{3}L_n$

$\therefore$ 数列 $\{L_n\}$ は初項 $L_1 = 3$，公比 $\frac{4}{3}$ の等比数列

$\therefore$ $\underline{L_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}}$ //

(3) $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = \underline{\frac{\sqrt{3}}{4}}$ //

また，面積は．

1辺につき．1個小正三角形1つ分増える．

S_n の1辺の長さは．$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ なので

小正三角形1個の面積は．$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2}$

$\therefore$ $n \geqq 2$ のとき．

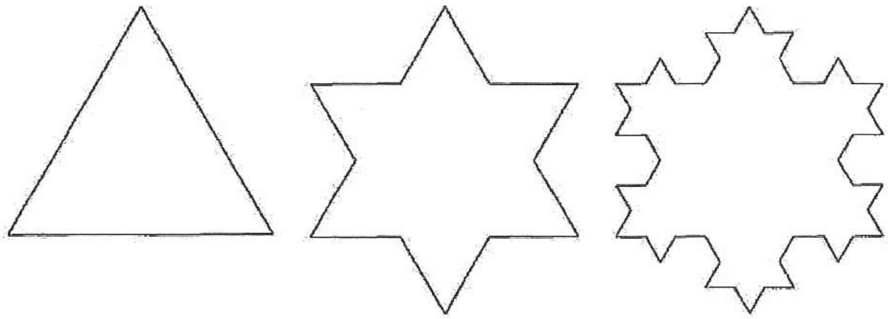
$$S_n - S_{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2} \cdot K_{n-1}$$
$$= \underline{\frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}}$$ //

日本女子大学

2013年 理学部 第1問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 下の図のように，F_1 を1辺の長さが1の正三角形とする．F_1 の3つの辺のそれぞれを3等分し3つの線分に分ける．この3つの線分の中央の線分に，その線分を1辺とする正三角形を F_1 の外側に追加して得られる多角形を F_2 とする．次に，F_2 の12個の辺のそれぞれを3等分し3つの線分に分ける．この3つの線分の中央の線分に，その線分を1辺とする正三角形を F_2 の外側に追加して得られる多角形を F_3 とする．以下同様にして，F_4，F_5，F_6，… を作るものとする．F_n の辺の個数を K_n，周の長さを L_n，面積を S_n とする．



F_1　　F_2　　F_3

(1) K_n $(n \geqq 1)$ を求めよ．

(2) L_n $(n \geqq 1)$ を求めよ．

(3) S_1 と $S_n - S_{n-1}$ $(n \geqq 2)$ を求めよ．

(4) S_n $(n \geqq 1)$ を求めよ．

(5) 数列 $\{L_n\}$ の極限を調べよ．

(6) 数列 $\{S_n\}$ の極限を調べよ．

(4) (3)より．$n \geqq 2$ のとき．　階差数列の公式

$$S_n = S_1 + \sum_{k=2}^{n} (S_k - S_{k-1})$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^{k-2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1-\frac{4}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{20}\left\{8 - 3\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right\} \text{　//}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ　忘れずに書く

(2)より．

(5) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \infty$ // (発散)

(4)より．

(6) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3}}{20}\left\{8 - \underbrace{3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}_{\to 0}\right\} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ // (収束)