



2013年理系1第3問

3  $xy$  平面において、点  $(2, 0)$  を点  $(1, \sqrt{3})$  へ、点  $(1, \sqrt{3})$  を点  $(-1, \sqrt{3})$  へ移す1次変換  $f$  を表す行列を  $A$  とする。  $B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  とし、  $B$  が表す1次変換を  $g$  とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $A$  および  $A^3$  を求めよ。  
 (2)  $A^6$  が表す1次変換によって点  $(1, 0)$  が移る点の座標を求めよ。  
 (3) 合成変換  $f \circ g$  を表す行列を  $C$  とするとき、  $C^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  となる最小の自然数  $n$  の値を求めよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ とおくと、 } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \therefore 2a = 1, 2c = \sqrt{3}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{また、} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \therefore a + \sqrt{3}b = -1, c + \sqrt{3}d = \sqrt{3}$$

$$\therefore b = -\frac{\sqrt{3}}{2}, d = \frac{1}{2}$$

$$\therefore A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \therefore A = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \quad \therefore A^3 = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2)  $A^3 = -E$  より  $A^6 = E$   $\therefore (1, 0)$  が移る点は  $(1, 0)$  自身

(3)  $C = AB = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 105^\circ & -\sin 105^\circ \\ \sin 105^\circ & \cos 105^\circ \end{pmatrix}$

$$\therefore C^n = \begin{pmatrix} \cos 105^\circ \times n & -\sin 105^\circ \times n \\ \sin 105^\circ \times n & \cos 105^\circ \times n \end{pmatrix}$$

$$\therefore 105^\circ \times n = 360^\circ \times m \quad (m: \text{整数})$$

$$\therefore 7n = 24m$$

7 と 24 は互いに素なので、  $n$  は 24 の倍数

$$7 \times 24 = 24 \times 7 \quad (n=24, m=7 \text{ のとき成り立つことがわかる})$$

$$\therefore n = 24$$