0001685274138999

神奈川大学

2012年 理系 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 定数 a, b は $a>b>0$ とし，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ とする．2曲線

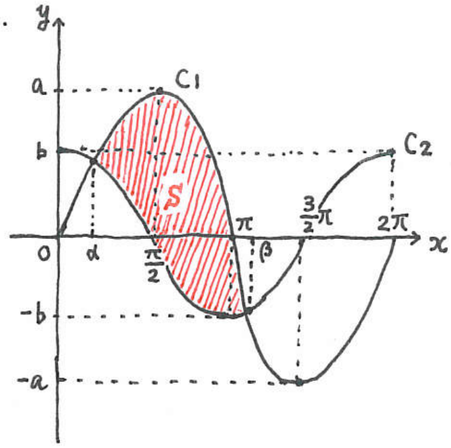
$$C_1 : y = a\sin x, \quad C_2 : y = b\cos x$$

の交点の x 座標を α, β $(\alpha < \beta)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\sin\alpha$, $\sin\beta$ と $\cos\alpha$, $\cos\beta$ を a, b を用いて表せ．

(2) C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積 S を a, b を用いて表せ．

(3) $S=2\sqrt{5}$, $a+b=3$ であるとき，定数 a, b の値を求めよ．



(1) $a\sin x = b\cos x$ の両辺を2乗して，

$a^2\sin^2 x = b^2\cos^2 x$

$\therefore\ a^2\sin^2 x = b^2(1-\sin^2 x)$

$\therefore\ \sin^2 x = \dfrac{b^2}{a^2+b^2}$ 　$\alpha<\beta$ より．$\sin\alpha>0$, $\sin\beta<0$

$\therefore\ \underline{\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\beta = -\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ // 　また，$\underline{\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\beta = -\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ //

(2) $S = \displaystyle\int_\alpha^\beta a\sin x - b\cos x\, dx$

$= \Big[-a\cos x - b\sin x\Big]_\alpha^\beta$

$= -a\cos\beta - b\sin\beta + a\cos\alpha + b\sin\alpha$

$= \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$= \underline{2\sqrt{a^2+b^2}}$ //

(3) $2\sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{5}$ より　$a^2+b^2=5$

$\therefore\ a^2+(3-a)^2=5$

$\therefore\ (a-2)(a-1)=0$ 　　$a=1$ のとき $b=2$，$a=2$ のとき $b=1$

$a>b$ より．$\underline{(a,b)=(2,1)}$ //