首都大学東京

2014年 第2問

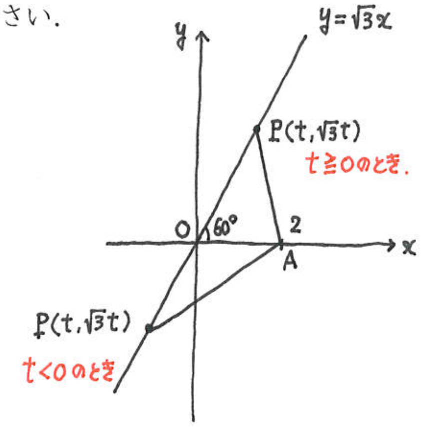
数理 石井K

2 原点をOとする座標平面において，点Aの座標を(2, 0)とし，点Pは直線 $y=\sqrt{3}x$ 上にあるものとする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 三角形AOPの外接円の半径が5となるときの点Pの座標を求めなさい．

(2) $\angle P=45°$ となるときの点Pの座標を求めなさい．

(3) $\angle A=45°$ となるときの三角形AOPの面積を求めなさい．



(1) 正弦定理より. $t \geqq 0$ のとき.

$$\frac{AP}{\sin 60°}=2\cdot 5$$

$t<0$ のとき.

$$\frac{AP}{\sin 120°}=2\cdot 5$$

よって，いずれの場合も $AP=5\sqrt{3}$

$\therefore (t-2)^2+3t^2=75 \quad \therefore 4t^2-4t-71=0 \quad \therefore t=\frac{4\pm\sqrt{16+4\cdot 4\cdot 71}}{8}=\frac{1\pm 6\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ Pの座標は $\underline{\left(\frac{1+6\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}+6\sqrt{6}}{2}\right), \left(\frac{1-6\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}-6\sqrt{6}}{2}\right)}$ //

(2) $t \geqq 0$ のとき. $\angle PAO=75°$ $\therefore$ 直線APの傾きは. $-\tan 75°=-\frac{\tan 30°+\tan 45°}{1-\tan 30°\tan 45°}=-2-\sqrt{3}$

$\therefore y=-(2+\sqrt{3})(x-2)$ と $y=\sqrt{3}x$ の交点がPなので $P\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$

$t<0$ のとき. $\angle PAO=15°$ $\therefore$ APの傾きは. $\tan(45°-30°)=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}$

$\therefore$ Pは $y=(2-\sqrt{3})(x-2)$ と $y=\sqrt{3}x$ の交点なので, $P\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-3}{2}\right)$

以上より. Pは $\underline{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-3}{2}\right)}$ //

(3)

・$P\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$ のとき. $\triangle AOP=\frac{1}{2}\left|3+\sqrt{3}\right|=\underline{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}$ //

・$P\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-3}{2}\right)$ のとき. $\triangle AOP=\frac{1}{2}\left|\sqrt{3}-3\right|=\underline{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}$ //