山口大学

2010年 第3問　1枚目/2枚.

数理 石井K

$\boxed{3}$ a，bは$a<b$を満たす実数とする．放物線$y=x^2$上の2点A$(a,\ a^2)$，B$(b,\ b^2)$においてそれぞれ接線を引く．この2つの接線の交点をP$(p,\ q)$とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) p，qをa，bを用いて表しなさい．

(2) 2点A，Bが$\angle APB=\frac{\pi}{4}$を満たしながらこの放物線上を動くとき，点Pの軌跡の方程式を求めなさい．

(3) (2)の条件の下で，この放物線と2つの接線で囲まれた図形の面積をqを用いて表しなさい．

(1) $y'=2x$ より．Aにおける接線は $y=2a(x-a)+a^2$ $\therefore y=2ax-a^2$

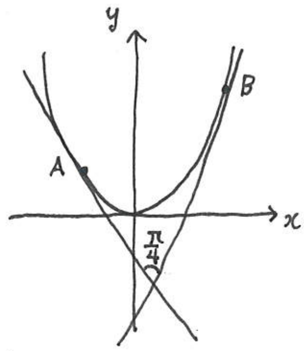
Bにおける接線は $y=2b(x-b)+b^2$ $\therefore y=2bx-b^2$

$\therefore$ 交点のx座標がpより．$2(a-b)p-(a^2-b^2)=0$

$\therefore (a-b)\{2p-(a+b)\}=0$　$a<b$ より．$\underline{p=\frac{a+b}{2}}$ //

このとき．$q=2a\cdot\frac{a+b}{2}-a^2$　$\therefore \underline{q=ab}$ //

(2) 2つの接線のなす角は45°より．



$\tan 45^\circ=\frac{2a-2b}{1+2a\cdot 2b}$　$\therefore 4ab+1=2(a-b)$

$\therefore b-a=-2ab-\frac{1}{2}$ …①

$b-a>0$ より．$2ab+\frac{1}{2}<0$　$\therefore ab<-\frac{1}{4}$　$\therefore q<-\frac{1}{4}$ …②

①の両辺を2乗して．$(b-a)^2=4a^2b^2+2ab+\frac{1}{4}$

$\therefore (a+b)^2-4ab=4(ab)^2+2ab+\frac{1}{4}$　$\therefore (2p)^2=4q^2+6q+\frac{1}{4}$

$$\therefore -\frac{p^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\frac{\left(q+\frac{3}{4}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$$

$\therefore$ ②とあわせて．

軌跡は双曲線 $-\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\frac{\left(y+\frac{3}{4}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$　ただし，$y<-\frac{1}{4}$ //

山口大学

2010年 第3問　2枚目／2枚

数理 石井K

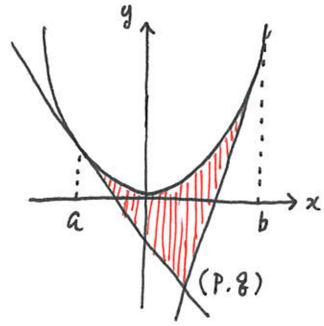
$\boxed{3}$ a, b は $a<b$ を満たす実数とする．放物線 $y=x^2$ 上の2点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$, $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ においてそれぞれ接線を引く．この2つの接線の交点を $\mathrm{P}(p,\ q)$ とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) p, q を a, b を用いて表しなさい．

(2) 2点A，Bが $\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{4}$ を満たしながらこの放物線上を動くとき，点Pの軌跡の方程式を求めなさい．

(3) (2)の条件の下で，この放物線と2つの接線で囲まれた図形の面積を q を用いて表しなさい．

(3)



$$S=\int_a^p x^2-(2ax-a^2)\,dx+\int_p^b x^2-(2bx-b^2)\,dx$$

$$=\int_a^p (x-a)^2\,dx+\int_p^b (x-b)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{(x-a)^3}{3}\right]_a^p+\left[\frac{(x-b)^3}{3}\right]_p^b$$

$$=\frac{(p-a)^3}{3}-\frac{(p-b)^3}{3}$$

ここで (2) の ① より． $b-a=-2q-\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} p-a=-q-\frac{1}{4}, \\ p-b=q+\frac{1}{4} \end{cases}$

$$\therefore S=\frac{1}{3}\left(-q-\frac{1}{4}\right)^3-\frac{1}{3}\left(q+\frac{1}{4}\right)^3$$

$$=-\frac{1}{192}(4q+1)^3-\frac{1}{192}(4q+1)^3$$

$$=\underline{-\frac{1}{96}(4q+1)^3}$$