



2012年 医学部 第4問

4 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ で表される1次変換を f とする. f によって, 点 $P_0(1, 0)$ が移る点を $P_1(x_1, y_1)$, 正の整数 n に対して点 $P_n(x_n, y_n)$ が移る点を $P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ とする. 原点を O として, 以下の問いに答えよ.

- (1) $\cos \angle P_n O P_{n+1}$ の値を求めよ.
- (2) 2以上の整数 n で, 直線 OP_n が線分 $P_0 P_1$ と交わる最小の n を求めよ.
- (3) i を虚数単位とする. 0でない整数 n に対して, 実数 a_n, b_n を $(2+3i)^n = a_n + b_n i$ により定める. このとき次の等式

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & -b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$$

が0でないすべての整数 n に対して成り立つことを証明せよ. ただし, 正の整数 m に対し $A^{-m} = (A^m)^{-1}$ とする.