



2011年 教育人間科学・生命環境（生命工以外）第2問

2 実数全体で定義された関数 $F(x)$ が次の条件①と②の両方を満たすとき「 $F(x)$ は性質(P)を持つ」ということにする.

① すべての実数 x について $F(x) > 0$ である.

② $F(x)$ は何度でも微分が可能で $\frac{d^2}{dx^2} \log F(x) = \frac{1}{\{F(x)\}^2}$ を満たす.

(1) $y = f(x)$ が性質(P)を持つとき $y''y - (y')^2 = 1$, $y'''y - y''y' = 0$ となること, および $\frac{y''}{y}$ は正の定数であることを示せ.

(2) $y = f(x)$ は性質(P)を持つとする. $\frac{y''}{y} = k^2$ (k は正の定数)とおくとき, $k^2y^2 - (y')^2 = 1$ であることを示し, さらに $ky - y' > 0$ および $ky + y' > 0$ が成り立つことを示せ.

(3) c を実数とする. (2) のとき, 関数 $kf(c)y + \frac{1}{k}f'(c)y'$ も性質(P)を持つことを証明せよ. ただし①を示すために

$$kf(c)y + \frac{1}{k}f'(c)y' = f(c)(ky \mp y') \pm \frac{1}{k}y'(kf(c) \pm f'(c)) \quad (\text{複号同順})$$

を利用してよい.