



2014年工学部第4問

数理
石井K4 xy 平面上で, 媒介変数 θ により

$$x = \sqrt{\cos 2\theta} \cos \theta, \quad y = \sqrt{\cos 2\theta} \sin \theta \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

と表される曲線を C とする.(1) 曲線 C 上で y 座標が最大となる点の座標を (p, q) とする. (p, q) を求めよ.(2) 曲線 C で囲まれた図形のうち $x \geq p$ の部分の面積を求めよ. ただし, p は (1) で求めた x 座標である.

$$\begin{aligned} (1) \frac{dy}{d\theta} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \cdot \sin \theta + \sqrt{\cos 2\theta} \cdot \cos \theta \\ &= \frac{\cos \theta \cos 2\theta - \sin \theta \sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \end{aligned}$$

θ	$-\frac{\pi}{4}$...	$-\frac{\pi}{6}$...	$\frac{\pi}{6}$...	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{dy}{d\theta}$		-	0	+	0	-	
y	0	\searrow	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	\nearrow	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	\searrow	0

極小 極大

$$= \frac{\cos 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \quad \therefore \frac{dy}{d\theta} = 0 \text{ となるのは } \theta = \pm \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \text{右の増減表より } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき } x = \frac{\sqrt{6}}{4} \quad \therefore (p, q) = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

(2) (1) と同様に x について増減表をかく.

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \quad \therefore \frac{dx}{d\theta} = 0 \text{ となるのは } \theta = 0$$

θ	$-\frac{\pi}{4}$...	0	...	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{dx}{d\theta}$		+	0	-	
x	0	\nearrow	1	\searrow	0

極大

$$2 \int_{\frac{\sqrt{6}}{4}}^1 y \, dx = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^0 \sqrt{\cos 2\theta} \cdot \sin \theta \cdot \left(-\frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right) d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin \theta \cdot \sin 3\theta \, d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} (\cos 2\theta - \cos 4\theta) \, d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}$$

//

