0002264185377999

# 佐賀大学

2016年 理工学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の問に答えよ.

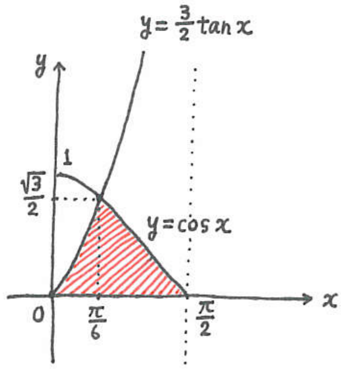
(1) $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ を利用して，不定積分 $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$ を求めよ.

(2) 2つの曲線 $y=\dfrac{3}{2}\tan x\ \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$, $y=\cos x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と $x$ 軸で囲まれた図形を，$x$ 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ.

(1) $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ と $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ より,

$$\int \tan^2 x\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1\,dx$$

$$= \underline{\tan x - x + C\ \ (C\text{は積分定数})}\ /\!/$$




(2) $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ における2曲線の交点を求めると,

$$\frac{3}{2}\tan x = \cos x \iff 3\sin x = 2\cos^2 x$$

$$\iff 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$\iff (2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$$

$$\iff \sin x = \frac{1}{2}$$

$\therefore\ x = \dfrac{\pi}{6}$ 　交点は $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 　$\therefore$ 右図のようになる.

$$\therefore\ V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{3}{2}\tan x\right)^2 dx + \pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$$

$$= \frac{9}{4}\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^2 x\,dx + \pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$$

(1)を使った

$$= \frac{9}{4}\pi\Big[\tan x - x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} + \pi\left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{9}{4}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right) + \pi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$= \underline{\frac{5\sqrt{3}}{8}\pi - \frac{5}{24}\pi^2}\ /\!/$$