横浜国立大学

2014年 第1問

1 次の問いに答えよ.

(1) 定積分 $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3\cos(x^2)\,dx$ を求めよ.

(2) $0<x<1$ のとき，不等式

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1} < x^x$$

が成り立つことを示せ.

(1) $t=x^2$ とおいて 置換積分

$dt = 2x\cdot dx$

x	$0 \to \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
t	$0 \to \frac{\pi}{2}$

$$\therefore (与式) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cdot\cos t\,\frac{dt}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)'\,t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[t\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt$$

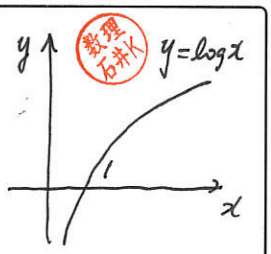
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot 1$$

$$= \frac{\pi-2}{4}$$

//

(2) $y=\log x$ のグラフは



単調増加なので

不等式の両辺を対数をとっても大小関係は変わらない.

よって. $(x+1)\log\frac{x+1}{2} < x\log x$ …(※)

を示せばよい

ここで, $f(x) = x\log x - (x+1)\log\frac{x+1}{2}$

とおくと,

$$f'(x) = \log x + 1 - \log\frac{x+1}{2} - 1$$

$$= \log\frac{2x}{x+1}$$

$$= \log\left(2-\frac{2}{x+1}\right)$$

$\therefore f'(x)=0$ となるのは $x=1$ のとき

x	0	…	1
$f'(x)$		−	
$f(x)$		↘	0

よって $0<x<1$ で

$f(x)>0$ となる

すなわち (※) が成り立ち

与式は成り立つ