0002074455297999

群馬大学

2015年 社会情報学部 第2問　1枚目／2枚　数理 石井K

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$，$\{d_n\}$ は，初項がそれぞれ $a_1 = a$，$b_1 = b$，$c_1 = c$，$d_1 = d$ で与えられ，漸化式

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 2b_n, \quad c_{n+1} = 2c_n + d_n, \quad d_{n+1} = c_n + 2d_n$$

を満たす．ただし，a，b，c，d は $\dfrac{c}{a} < \dfrac{d}{b}$ を満たす正の数とする．

(1) $\dfrac{c}{a} < \dfrac{c+d}{a+b} < \dfrac{d}{b}$ が成り立つことを証明せよ．

(2) すべての自然数 n について $\dfrac{c_n}{a_n} < \dfrac{d_n}{b_n}$ が成り立つことを，数学的帰納法によって証明せよ．

(3) $a = 2$, $b = 1$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) a, b, c, d が正であり，$\dfrac{c}{a} < \dfrac{d}{b}$ より，$ad - bc > 0$ $\cdots$①

$$\frac{c+d}{a+b} - \frac{c}{a} = \frac{ac+ad-c(a+b)}{a(a+b)} = \frac{ad-bc}{a(a+b)} > 0 \quad (\because a>0,\ b>0,\ ①\text{より})$$

$$\frac{d}{b} - \frac{c+d}{a+b} = \frac{ad+bd-b(c+d)}{b(a+b)} = \frac{ad-bc}{b(a+b)} > 0 \quad (\because a>0,\ b>0,\ ①\text{より})$$

以上より，$\dfrac{c}{a} < \dfrac{c+d}{a+b} < \dfrac{d}{b}$ が成り立つ ▨

(2) (i) $n=1$ のとき，

$\dfrac{c}{a} < \dfrac{d}{b}$ となり，これは与えられた条件であるから成り立つ

(ii) $n=k$ のとき 成り立つと仮定すると，$\dfrac{c_k}{a_k} < \dfrac{d_k}{b_k}$　漸化式より，a_k, b_k, c_k, d_k は正で

あることが分かるので，これは，$a_k d_k - b_k c_k > 0$ $\cdots$② と同値である．

このとき，
$$\frac{d_{k+1}}{b_{k+1}} - \frac{c_{k+1}}{a_{k+1}} = \frac{c_k+2d_k}{a_k+2b_k} - \frac{2c_k+d_k}{2a_k+b_k}$$
$$= \frac{(c_k+2d_k)(2a_k+b_k)-(2c_k+d_k)(a_k+2b_k)}{(a_k+2b_k)(2a_k+b_k)}$$
$$= \frac{3(a_k d_k - b_k c_k)}{(a_k+2b_k)(2a_k+b_k)} > 0 \quad (\because ②\text{より})$$

この後 (1) を使ってもよいが そこまで速くならないので，ふつうに 計算した。
(1) を使うと，ことわりがきが面倒だったので…。

群馬大学

2015年 社会情報学部 第2問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ は，初項がそれぞれ $a_1=a$, $b_1=b$, $c_1=c$, $d_1=d$ で与えられ，漸化式

$$a_{n+1}=2a_n+b_n,\quad b_{n+1}=a_n+2b_n,\quad c_{n+1}=2c_n+d_n,\quad d_{n+1}=c_n+2d_n$$

を満たす．ただし，a, b, c, d は $\dfrac{c}{a}<\dfrac{d}{b}$ を満たす正の数とする．

(1) $\dfrac{c}{a}<\dfrac{c+d}{a+b}<\dfrac{d}{b}$ が成り立つことを証明せよ．

(2) すべての自然数 n について $\dfrac{c_n}{a_n}<\dfrac{d_n}{b_n}$ が成り立つことを，数学的帰納法によって証明せよ．

(3) $a=2$, $b=1$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) のつづき．

$\therefore \dfrac{c_{k+1}}{a_{k+1}}<\dfrac{d_{k+1}}{b_{k+1}}$ が成り立つ　$\therefore$ $n=k+1$ のときも成り立つ

(i), (ii) より，すべての自然数 n について，$\dfrac{c_n}{a_n}<\dfrac{d_n}{b_n}$ が成り立つ ▨

(3) $a_{n+1}=2a_n+b_n$ … ③，$b_{n+1}=a_n+2b_n$ … ④ とすると．

③＋④ より，$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$

$\therefore$ 数列 $\{a_n+b_n\}$ は 初項が $a_1+b_1=3$，公比 3 の等比数列

$\therefore a_n+b_n=3^n$ … ⑤

③－④ より，
$$\begin{aligned}a_{n+1}-b_{n+1}&=a_n-b_n\\&=a_{n-1}-b_{n-1}\\&\ \ \vdots\\&=a_1-b_1\\&=1\end{aligned}$$

$\therefore a_n-b_n=1$ … ⑥

⑤＋⑥ より，$2a_n=3^n+1$

$$\therefore a_n=\frac{3^n+1}{2}$$ //