群馬大学

2015年 医学部 第2問

$\boxed{2}$ x, y, z は正の数で $x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4$ を満たす.

(1) $x+y=a$, $xy=b$ とおくとき, a, b を z を用いて表せ.

(2) z のとりうる値の範囲を求めよ.

(1) $x+y+z=4$ より. $a+z=4$ $\quad \therefore \underline{a=4-z}$ //

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4$ より. $\dfrac{x+y}{xy}=4-\dfrac{1}{z}$ $\quad \therefore \dfrac{a}{b}=4-\dfrac{1}{z}$

$\therefore \dfrac{4-z}{b}=\dfrac{4z-1}{z}$ $\quad \therefore$ x, y, z が正より $z \neq \dfrac{1}{4}$

$\therefore \underline{b=\dfrac{z(4-z)}{4z-1}}$ //

(2) (1)と解と係数の関係より.

x, y は方程式

$t^2-at+b=0$ の解である. $\therefore$ 判別式を D とすると,

$D=a^2-4b \geqq 0$ $\cdots$ ①

また, x, y は正なので, $a>0$ かつ $b>0$ $\iff$ $\dfrac{1}{4}<z<4$ $\cdots$ ②

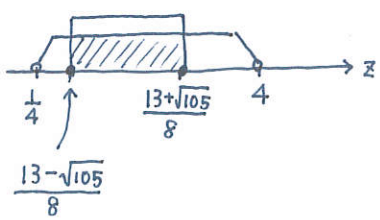
① は (1) より. $(4-z)^2-4\cdot\dfrac{z(4-z)}{4z-1} \geqq 0$

$\therefore (4-z)\left(4-z-\dfrac{4z}{4z-1}\right) \geqq 0$

② より. $4-z>0$ なので $\dfrac{(4-z)(4z-1)-4z}{4z-1} \geqq 0$ $\quad \therefore 4z^2-13z+4 \leqq 0$

$\therefore \dfrac{13-\sqrt{105}}{8} \leqq z \leqq \dfrac{13+\sqrt{105}}{8}$ $\cdots$ ③

③, ④ と $\dfrac{1}{4}<\dfrac{13-\sqrt{105}}{8}<\dfrac{3}{8}$, $\dfrac{23}{8}<\dfrac{13+\sqrt{105}}{8}<3$ より



$\underline{\dfrac{13-\sqrt{105}}{8} \leqq z \leqq \dfrac{13+\sqrt{105}}{8}}$ //