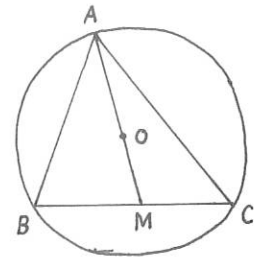


2016年 第7問


 数理
石井K

7 点Oを中心とする半径1の円に内接する鋭角三角形ABCにおいて、辺BCと直線AOとの交点をMとする。 $5\vec{OA} + 4\vec{OB} + 3\vec{OC} = \vec{0}$ が成り立っているとき、次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{OB} \cdot \vec{OC}$ を求めよ。
- (2) BCの長さを求めよ。
- (3) BMの長さを求めよ。
- (4) $\cos \angle BOM$ を求めよ。



$$(1) -5\vec{OA} = 4\vec{OB} + 3\vec{OC} \text{ より}$$

$$25|\vec{OA}|^2 = 16|\vec{OB}|^2 + 24\vec{OB} \cdot \vec{OC} + 9|\vec{OC}|^2$$

$$|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = 1 \text{ であるから,}$$

$$25 = 16 + 24\vec{OB} \cdot \vec{OC} + 9 \quad \therefore \underline{\vec{OB} \cdot \vec{OC} = 0} \text{ ,,}$$

$$(2) |\vec{BC}|^2 = |\vec{OC} - \vec{OB}|^2 \\ = |\vec{OC}|^2 - 2\vec{OB} \cdot \vec{OC} + |\vec{OB}|^2 \\ = 2$$

$$\therefore \underline{BC = \sqrt{2}} \text{ ,,}$$

$$(3) 5\vec{OA} + 4\vec{OB} + 3\vec{OC} = \vec{0} \text{ より,}$$

$$-\frac{5}{7}\vec{OA} = \frac{4}{7}\vec{OB} + \frac{3}{7}\vec{OC}$$

$$\therefore BM : MC = 3 : 4$$

$$\therefore BM = \sqrt{2} \cdot \frac{3}{7} = \underline{\frac{3\sqrt{2}}{7}} \text{ ,,}$$

$$(4) (3) \text{ より, } \vec{OM} = -\frac{5}{7}\vec{OA} \quad \therefore |\vec{OM}| = \frac{5}{7}$$

$$\vec{OB} \cdot \vec{OM} = \vec{OB} \cdot \left(\frac{4}{7}\vec{OB} + \frac{3}{7}\vec{OC} \right) \\ = \frac{4}{7}|\vec{OB}|^2 + \frac{3}{7}\vec{OB} \cdot \vec{OC} \\ = \frac{4}{7}$$

$$\cos \angle BOM = \frac{\vec{OB} \cdot \vec{OM}}{|\vec{OB}| |\vec{OM}|} = \frac{\frac{4}{7}}{1 \cdot \frac{5}{7}} = \underline{\frac{4}{5}} \text{ ,,}$$