秋田大学

2012年 第2問

$\boxed{2}$ 平面上のベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ が，$|\overrightarrow{OA}|=3$, $|\overrightarrow{OB}|=6$, $|\overrightarrow{OC}|=2$ と

$$\overrightarrow{OB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OC}$$

を満たす．次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ を求めよ．

(2) AB を 2 : 1 に内分する点を P とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ で表せ．

(3) $|\overrightarrow{OP}|$ を求めよ．

(4) 点 Q が

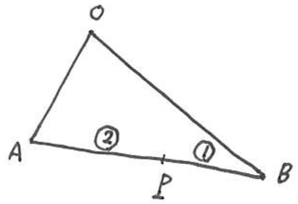
$$\overrightarrow{OQ}=\frac{5}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{17}{16}\overrightarrow{OC}$$

を満たすとき，Q が四角形 OABC の内部にあることを示せ．

(1) $\overrightarrow{OB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OC}$ より.

$$|\overrightarrow{OB}|^2=\frac{16}{9}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{9}{4}|\overrightarrow{OC}|^2+4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$$

$\therefore\ 36=16+9+4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ $\quad\therefore\ \underline{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{11}{4}}$ //



(2) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OC}\right)$

$=\underline{\frac{11}{9}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}$ //

(3) (2)より. $|\overrightarrow{OP}|^2=\frac{121}{81}|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2+\frac{22}{9}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

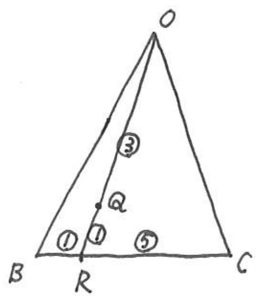
$=\frac{145}{6}$

$\therefore\ \underline{|\overrightarrow{OP}|=\frac{\sqrt{870}}{6}}$ //

(4) $\overrightarrow{OQ}=\frac{5}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{17}{16}\overrightarrow{OC}$ に $\overrightarrow{OA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}-\frac{9}{8}\overrightarrow{OC}$ を代入すると.

$\overrightarrow{OQ}=\frac{5}{8}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OC}$

$=\frac{3}{4}\left(\frac{5}{6}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}\right)$



$\therefore$ BC を 1 : 5 に内分する点を R とおくと. Q は線分 OR を 3 : 1 に内分する点であるから. Q は △OBC に含まれる（内部にある）

$\therefore$ Q は四角形 OABC の内部にある ▨