



2012年人文社会科学第1問

1 座標平面上に3点 $O(0, 0)$, $P_1(\sqrt{3}, 1)$, $P_2(\sqrt{3}, 0)$ をとる. 点 P_2 から線分 OP_1 に引いた垂線と線分 OP_1 との交点を P_3 とする. 次に, 点 P_3 から線分 OP_2 に引いた垂線と線分 OP_2 との交点を P_4 とする. この操作を繰り返すことにより, 点 P_n を定める. すなわち, 点 P_{n-1} から OP_{n-2} に引いた垂線と線分 OP_{n-2} との交点を P_n とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 三つの線分 P_1P_2 , P_2P_3 , P_3P_4 の長さをそれぞれ求めよ.
- (2) 線分 P_nP_{n+1} の長さを n を用いて表せ.
- (3) 三つの三角形 OP_1P_2 , OP_2P_3 , OP_3P_4 の面積をそれぞれ求めよ.
- (4) 三角形 OP_nP_{n+1} の面積を n を用いて表せ.
- (5) 三角形 OP_nP_{n+1} の面積を a_n とおき,

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

と定義する. S_n は $2\sqrt{3}$ 以上にならないことを証明せよ.