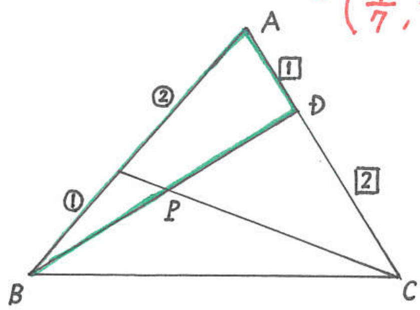
福岡大学

2016年 医学部（系統別） 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ △ABC内に点Pがあり，直線BPと辺ACの交点は辺ACを1：2に内分し，直線CPと辺ABの交点は辺ABを2：1に内分する．このとき，$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ と表すと $(s,\ t)=$ $\boxed{}$ $\left(\frac{4}{7},\frac{1}{7}\right)$ である．また，△ABCが正三角形のとき，$\cos\angle PAB=$ $\boxed{}$ $\frac{3\sqrt{21}}{14}$ である．



直線BPと辺ACの交点をDとすると，

メネラウスの定理より，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{DP}{PB}=1$$

よって，BP：PD = 3：4

$$\therefore\ \overrightarrow{AP}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AD}$$
$$=\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}\qquad\therefore\ (s,t)=\left(\frac{4}{7},\frac{1}{7}\right)$$

△ABCが正三角形として，1辺の長さを3とする．

余弦定理より，$BD^2=3^2+1^2-2\cdot3\cdot1\cdot\cos60^\circ$
$$=7$$

$\therefore$ $BD=\sqrt{7}$ で，BP：PD = 3：4より，$BP=\frac{3}{\sqrt{7}}$

また，$|\overrightarrow{AP}|^2=\frac{16}{49}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{8}{49}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{49}|\overrightarrow{AC}|^2$
$$=\frac{144}{49}+\frac{36}{49}+\frac{9}{49}$$
$$=\frac{189}{49}$$

$$\therefore\ AP=\frac{3\sqrt{21}}{7}$$

$\therefore$ 余弦定理より，$\cos\angle PAB=\dfrac{\frac{189}{49}+9-\frac{9}{7}}{2\cdot3\cdot\frac{3\sqrt{21}}{7}}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$

＊すなおにベクトルで解いた方が速かったかもしれない…