岐阜大学

2014年 第4問　1枚目 / 2枚

数理 石井K

4 行列 I, J, O をそれぞれ $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ とする．また，実数 a, b を用いて $aI+bJ$ と表される行列全体の集合を U とおく．行列 A, B が U に属するとき，以下の問に答えよ．

(1) AB は U に属することを示せ．

(2) $AB=BA$ であることを示せ．

(3) $AB=O$ と仮定する．このとき $A=O$ または $B=O$ であることを示せ．

(4) $A^4+I=O$ をみたす A をすべて求めよ．

(1) $A=aI+bJ$, $B=cI+dJ$ とおくと．

$AB=acI^2+adIJ+bcJI+bdJ^2$

ここで，$I^2=I$, $IJ=JI=J$, $J^2=-I$ より，

$AB=(ac-bd)I+(ad+bc)J$ …①

$ac-bd$, $ad+bc$ はともに実数であるから，$AB\in U$ ▨

(2) (1) と同様に BA を計算すると．

$BA=acI^2+bcIJ+adJI+bdJ^2$

$=acI+bcJ+adJ-bdI$

$=(ac-bd)I+(ad+bc)J$

$=AB$ ▨

(3) ① と J は I の実数倍ではないことより．

$$\begin{cases} ac-bd=0 & \cdots② \\ ad+bc=0 & \cdots③ \end{cases} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\text{両辺を}c\text{倍}} \\ \xrightarrow{\text{両辺を}d\text{倍}} \end{matrix} \quad \begin{cases} ac^2-bcd=0 & \cdots②' \\ ad^2+bcd=0 & \cdots③' \end{cases}$$

$\therefore$ ②$'$+③$'$ より．$a(c^2+d^2)=0$

(i) $c^2+d^2=0$ のとき．

$c=d=0$ となり．$B=O$ となる．

(ii) $c^2+d^2\neq 0$ のとき．

$a=0$ となり．$b\neq 0$ と仮定すると．②，③ より，

$c=0$ かつ $d=0$　これは $c^2+d^2\neq 0$ に矛盾する

よって．$b=0$ となり．$A=O$

(i), (ii) より．

$A=O$ または $B=O$ ▨

2014年 第4問　2枚目／2枚

数理 石井K

4 行列 I, J, O をそれぞれ $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ とする．また，実数 a, b を用いて $aI+bJ$ と表される行列全体の集合を U とおく．行列 A, B が U に属するとき，以下の問に答えよ．

(1) AB は U に属することを示せ．

(2) $AB=BA$ であることを示せ．

(3) $AB=O$ と仮定する．このとき $A=O$ または $B=O$ であることを示せ．

(4) $A^4+I=O$ をみたす A をすべて求めよ．

(4) (1)の① に $c=a$, $d=b$ を代入すると．

$$A^2=(a^2-b^2)I+2abJ$$

よって，
$$\begin{aligned}A^4&=A^2\cdot A^2\\&=(a^2-b^2)^2I^2+2ab(a^2-b^2)IJ+2ab(a^2-b^2)JI+4a^2b^2J^2\\&=(a^4+b^4-6a^2b^2)I+4ab(a^2-b^2)J\end{aligned}$$

$A^4=-I$ より，
$$\begin{cases}a^4+b^4-6a^2b^2=-1 & \cdots④\\ 4ab(a^2-b^2)=0 & \cdots⑤\end{cases}$$

⑤より．$a=0$ または $b=0$ または $a^2=b^2$

(i) $a=0$ のとき．

④より．$b^4=-1$ これをみたす実数 b は存在しない　∴不適．

(ii) $b=0$ のとき．

(i)と同様に不適

(iii) $a^2=b^2$ のとき

④より．$-4a^4=-1$　∴ $a^4=\frac{1}{4}$　∴ $a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore (a,b)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\therefore A=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1&-1\\1&-1\end{pmatrix},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$$ //