群馬大学

2015年 医学部 第1問

1 $\vec{a}$，$\vec{b}$ を単位ベクトルとし，$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$，$\vec{d} = -\vec{a} + 2\vec{b}$ とおく．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角と $\vec{c}$ と $\vec{d}$ のなす角がともに θ であるとき，θ を求めよ．ただし $0° < \theta < 180°$ とする．

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$$
$$= 1 + 2\cdot1\cdot1\cdot\cos\theta + 1$$
$$= 2(1+\cos\theta)$$
$$\therefore |\vec{c}| = \sqrt{2(1+\cos\theta)}$$

$$|\vec{d}|^2 = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4|\vec{b}|^2$$
$$= 1 - 4\cdot1\cdot1\cdot\cos\theta + 4$$
$$= 5 - 4\cos\theta$$
$$\therefore |\vec{d}| = \sqrt{5-4\cos\theta}$$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{c}||\vec{d}|}$，$\vec{c}\cdot\vec{d} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(-\vec{a}+2\vec{b}) = -|\vec{a}|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} + 2|\vec{b}|^2 = 1+\cos\theta$ より，

$$\cos\theta = \frac{1+\cos\theta}{\sqrt{2(1+\cos\theta)}\cdot\sqrt{5-4\cos\theta}}$$
$$= \frac{\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{10-8\cos\theta}}$$

(右辺) >0 より，$\cos\theta > 0$

よって，両辺を2乗して，整理すると，

$$(10-8\cos\theta)\cdot\cos^2\theta = 1+\cos\theta$$
$$\therefore 8\cos^3\theta - 10\cos^2\theta + \cos\theta + 1 = 0$$
$$(\cos\theta - 1)(2\cos\theta - 1)(4\cos\theta + 1) = 0$$

$\cos\theta > 0$ より，$\cos\theta = 1, \dfrac{1}{2}$

$0° < \theta < 180°$ より．$\underline{\theta = 60°}$ //