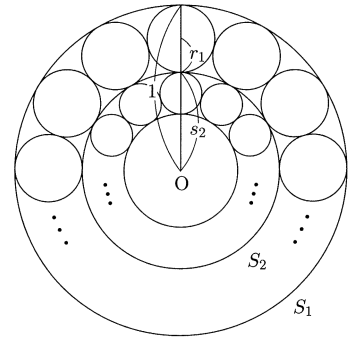




2011年第4問

4  $k, n$  は自然数で  $n \geq 3$  とする. 平面上の点  $O$  を中心とする半径  $1$  の円を  $S_1$  とする. 右の図のように, 半径  $r_1$  の  $n$  個の円は隣り合う他の  $2$  つの円と外接し, かつ  $S_1$  に内接している. さらに, 点  $O$  を中心とする円  $S_2$  は, 半径  $r_1$  のすべての円に外接している. 同様に,  $k \geq 2$  に対して, 半径  $r_k$  の  $n$  個の円は隣り合う他の  $2$  つの円と外接し, かつ円  $S_k$  に内接している. さらに点  $O$  を中心とする円  $S_{k+1}$  は, 半径  $r_k$  のすべての円に外接している.  $S_2$  の半径を  $s_2$  とする. 以下の問に答えよ.



- (1)  $r_1$  と  $s_2$  を  $n$  を用いて表せ.
- (2) 半径  $r_k$  の  $1$  つの円の面積を  $T_k(n)$  とする.  $T_k(n)$  を  $k$  と  $n$  を用いて表せ.
- (3)  $U(n) = n \sum_{k=1}^{\infty} T_k(n)$  とする.  $U(n)$  を求めよ.
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} U(n)$  を求めよ.