群馬大学

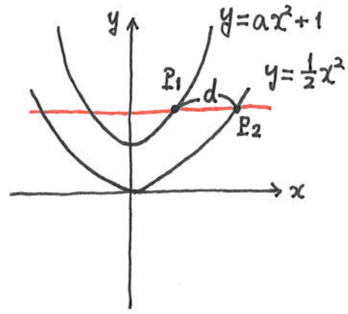
2014年 医学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ a, bは実数で$a>0$, $b>1$とする．放物線$y=ax^2+1$と直線$y=b$との交点で第1象限にあるものをP_1とし，放物線$y=\frac{1}{2}x^2$と直線$y=b$の交点で第1象限にあるものをP_2とする．P_1とP_2の間の距離をdとするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a=\frac{1}{2}$のとき，$d\leqq 1$であるためのbの値の範囲を求めよ．

(2) $a\neq\frac{1}{2}$のとき，$d\leqq 1$であるためのbの値の範囲をaを用いて表せ．



(1) $a=\frac{1}{2}$のとき．$y=\frac{1}{2}x^2+1$と$y=b$の交点を求めると，

$\frac{1}{2}x^2+1=b \quad \therefore \quad x^2=2b-2 \quad x>0$より $x=\sqrt{2b-2}$

同様に $\frac{1}{2}x^2=b$ より $x=\sqrt{2b} \quad \therefore d=\sqrt{2b}-\sqrt{2b-2}$

$\therefore d\leqq 1$より．$\sqrt{2b}-\sqrt{2b-2}\leqq 1$ 両辺正なので2乗して．

$2b+2b-2-2\sqrt{2b(2b-2)}\leqq 1 \quad \therefore \quad 4b-3\leqq 2\sqrt{2b(2b-2)}$

再び両辺，正なので2乗して，$16b^2-24b+9\leqq 16b^2-16b$

$\therefore \underline{b\geqq\frac{9}{8}}$ //

(2) (1)と同様にして，P_1，P_2の座標を求めると，$P_1\left(\sqrt{\frac{b-1}{a}}, b\right)$，$P_2\left(\sqrt{2b}, b\right)$

$\therefore d=\left|\sqrt{\frac{b-1}{a}}-\sqrt{2b}\right| \quad \therefore \left(\sqrt{\frac{b-1}{a}}-\sqrt{2b}\right)^2\leqq 1$

$\therefore \frac{b-1}{a}+2b-2\sqrt{2b}\cdot\sqrt{\frac{b-1}{a}}\leqq 1 \iff \frac{b-1}{a}+2b-1\leqq 2\sqrt{2b}\cdot\sqrt{\frac{b-1}{a}}$

$\therefore \frac{(b-1)^2}{a^2}+(2b-1)^2+\frac{2(b-1)(2b-1)}{a}\leqq\frac{8b(b-1)}{a}$

整理すると，$(2a-1)^2b^2-2(2a^2-a+1)b+(a+1)^2\leqq 0$

このbについての2次不等式を解くと．

$$\begin{cases} a>1\text{のとき．求める}b\text{は存在しない} \\ 0<a\leqq 1\text{かつ}a\neq\frac{1}{2}\text{のとき．} \dfrac{2a^2-a+1-2a\sqrt{2(1-a)}}{(2a-1)^2}\leqq b\leqq\dfrac{2a^2-a+1+2a\sqrt{2(1-a)}}{(2a-1)^2} \end{cases}$$

//