群馬大学

2016年 理工学部 第2問

$\boxed{2}$ $0 < \theta < \pi$ とする．単位円の周上の3点 A(1, 0), B($\cos\theta$, $\sin\theta$), C($\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$) を頂点とする△ABCの面積を θ を用いて表せ．また，△ABCの面積の最大値とそのときの θ の値を求めよ．

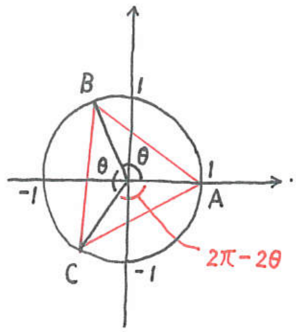
$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\theta + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\theta + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin(2\pi - 2\theta)$$

$$= \sin\theta + \frac{1}{2}\sin(-2\theta)$$

$$= \sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$$= \sin\theta - \sin\theta\cos\theta$$

$$= \underline{\sin\theta(1-\cos\theta)}\,_{//}$$



△ABCの面積を $f(\theta)$ で表すと，

$$f'(\theta) = \cos\theta(1-\cos\theta) + \sin\theta\cdot\sin\theta$$

$$= \cos\theta - \cos^2\theta + 1 - \cos^2\theta$$

$$= -2\cos^2\theta + \cos\theta + 1$$

$$= -(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1)$$

$0 < \theta < \pi$ より，$\cos\theta - 1 < 0$ であり

増減表は右のようになる．

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	(0)	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	(0)

∴ △ABCの面積の最大値は $\underline{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\left(\theta = \dfrac{2}{3}\pi \text{ のとき}\right)}\,_{//}$