2014年 人文学部 第2問

2 3点O(0, 0), A(4, 0), B(0, 3)がある．このとき，次の問に答えよ．

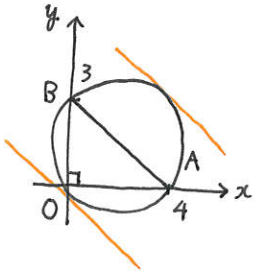
(1) 3点O, A, Bを通る円の方程式を求めよ．

(2) 点Cが(1)で求めた円の周上を動くとき，△ABCの面積が最大となるような点Cの座標を求めよ．

(1) 線分ABが円の直径になっているので

円の中心は線分ABの中点 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ であり,

半径は $\frac{1}{2}\cdot 5 = \frac{5}{2}$ となる



$\therefore \ (x-2)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$\therefore \ \underline{x^2 - 4x + y^2 - 3y = 0}$ //

(2) 右図のように傾きが直線ABの傾き $\left(= -\frac{3}{4}\right)$ に等しい

直線が円に接するとき，接点がCであるから

直線を $y = -\frac{3}{4}x + k$ とおくと.

(1)より. $x^2 - 4x + \frac{9}{16}x^2 - \frac{3}{2}kx + k^2 - 3\left(-\frac{3}{4}x + k\right) = 0$

$\therefore \ \frac{25}{16}x^2 - \left(\frac{7}{4} + \frac{3}{2}k\right)x + k^2 - 3k = 0 \ \cdots ①$

$\therefore \ D = \left(\frac{7}{4} + \frac{3}{2}k\right)^2 - 4\cdot\frac{25}{16}\cdot(k^2 - 3k)$

$= -4k^2 + 24k + \frac{49}{16}$

$= -4\left(k - \frac{49}{8}\right)\left(k + \frac{1}{8}\right)$ $\quad \therefore \ D = 0$ より $k = \frac{49}{8}, -\frac{1}{8}$

①より. $\underline{\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}$ //