



2015年理系第2問

2 座標平面上の放物線

$$C_n : y = x^2 - p_n x + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を考える。ただし、 p_n, q_n は

$$p_1^2 - 4q_1 = 4, \quad p_n^2 - 4q_n > 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

を満たす実数とする。 C_n と x 軸との二つの交点を結ぶ線分の長さを l_n とする。また、 C_n と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n は

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} \right)^3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1) C_n の頂点の y 座標を l_n を用いて表せ。
- (2) 数列 $\{l_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) $p_n = n\sqrt{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)であるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(-\frac{2q_n}{n^2} \right)$ を求めよ。ただし、 $\log x$ は x の自然対数である。