2016年 現代心理（心理）・コミュ（コミュ）・観光（交流）・経営 第2問

2 aを正の整数とし，数列$\{b_n\}$を

$$b_1=1,\quad b_2=a,\quad b_{n+2}=b_{n+1}+b_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める．さらに，$n\geqq 2$に対して，数列$\{c_n\}$を

$$c_n=b_{n+1}b_{n-1}-{b_n}^2\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

と定める．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) b_3，b_4，b_5をそれぞれaを用いて表せ．
(2) c_2，c_3，c_4をそれぞれaを用いて表せ．
(3) c_nをb_{n-1}とb_{n-2}を用いて表せ．また，c_{n-1}をb_{n-1}とb_{n-2}を用いて表せ．
(4) c_nをc_{n-1}を用いて表せ．
(5) 2以上のすべての整数nについて，$|c_n|=1$が成り立つようなaをすべて求めよ．

(1) $b_3=b_2+b_1=a+1$

$b_4=b_3+b_2=2a+1$

$b_5=b_4+b_3=3a+2$

$\therefore\ \underline{b_3=a+1,\ b_4=2a+1,\ b_5=3a+2}$ //

(2) $c_2=b_3b_1-{b_2}^2=a+1-a^2$

$c_3=b_4b_2-{b_3}^2=a(2a+1)-(a+1)^2$

$=a^2-a-1$

$c_4=b_5b_3-{b_4}^2=(a+1)(3a+2)-(2a+1)^2$

$=-a^2+a+1$

$\therefore\ \underline{c_2=-a^2+a+1,\ c_3=a^2-a-1}$

$\underline{c_4=-a^2+a+1}$ //

(3) $c_n=(b_n+b_{n-1})b_{n-1}-(b_{n-1}+b_{n-2})^2$

$=b_nb_{n-1}-2b_{n-1}b_{n-2}-{b_{n-2}}^2$

$=(b_{n-1}+b_{n-2})b_{n-1}-2b_{n-1}b_{n-2}-{b_{n-2}}^2$

$=\underline{{b_{n-1}}^2-b_{n-1}b_{n-2}-{b_{n-2}}^2\ (n\geqq 3)}$ // …①

$c_{n-1}=b_n\cdot b_{n-2}-{b_{n-1}}^2$

$=(b_{n-1}+b_{n-2})\cdot b_{n-2}-{b_{n-1}}^2$

$=\underline{-{b_{n-1}}^2+b_{n-1}b_{n-2}+{b_{n-2}}^2\ (n\geqq 3)}$ // …②

(4) ①＋②より．$c_n+c_{n-1}=0\quad (n\geqq 3)$　$\therefore\ \underline{c_n=-c_{n-1}\ (n\geqq 3)}$ //

(5) (4)より．$|c_2|=|c_3|=|c_4|=\cdots=|c_n|$ となるから

2以上のすべての整数nについて，$|c_n|=1\iff|a^2-a-1|=1$

$a^2-a-1=1$ または $a^2-a-1=-1$

$\therefore\ a^2-a-2=0$ または．$a^2-a=0$

$(a-2)(a+1)=0$ または $a(a-1)=0$

$a>0$より．$\underline{a=1,2}$ //