2016年 環境科学部・工学部 第4問

$\boxed{4}$ 曲線 $C : y = (\log_e x)^2$ とする.

(1) 点 $(0,\ 3)$ から C に引いた接線の方程式をすべて求めよ.

(2) C と x 軸, および直線 $x = e$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1) 接点を $(t, (\log t)^2)$ とおくと

$y' = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \log x = \frac{2\log x}{x}$ より接線は

$y = \frac{2\log t}{t}(x - t) + (\log t)^2$

$\therefore\ y = \frac{2\log t}{t}x - 2\log t + (\log t)^2 \cdots (*)$

これが, $(0, 3)$ を通るので

$3 = -2\log t + (\log t)^2$

$\therefore (\log t)^2 - 2\log t - 3 = 0$

$(\log t - 3)(\log t + 1) = 0$

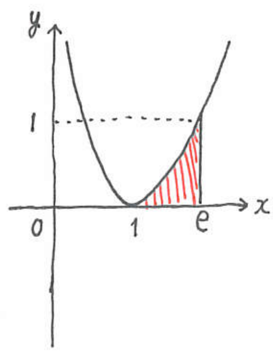
$\therefore \log t = -1, 3$ となり, $t = \frac{1}{e}, e^3$

$(*)$ に代入して, $\underline{y = -2ex + 3,\quad y = \frac{6}{e^3}x + 3}$ //

(2) $y' = 0$ となるのは $x = 1$ のときで増減表は右のようになる

ここで, 定義域は $x > 0$ である

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		$\searrow$	0	$\nearrow$



$\therefore\ S = \int_1^e (\log x)^2\,dx$

$= \int_1^e (x)'(\log x)^2\,dx$

$= \left[x(\log x)^2\right]_1^e - \int_1^e 2\log x\,dx$

$= e - 2\int_1^e (x)'\log x\,dx$

$= e - 2\left[x\log x\right]_1^e + 2\int_1^e dx$

$= e - 2e + 2\left[x\right]_1^e$

$= \underline{e - 2}$ //