



2013年第2問

2 自然数  $a_1, a_2$  が,

$$a_1 \leq a_2, \quad a_1 + a_2 = a_1 a_2 \quad (1)$$

を満たすとき,  $a_1, a_2$  を次のように求めることができる.

**解法**

(1) の 2 式の両辺を  $a_1 a_2$  で割ると

$$\frac{1}{a_2} \leq \frac{1}{a_1}, \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = 1$$

を得る. よって, この 2 つの式を組み合わせて

$$1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} = \frac{2}{a_1}$$

を得る. これより  $a_1 \leq 2$  である.  $a_1 = 1$  のとき, これを (1) の右の式に代入すると  $1 + a_2 = a_2$  となって矛盾する.  $a_1 = 2$  のとき, これを (1) の右の式に代入すると  $a_2 = 2$  となる. 逆に  $a_1 = a_2 = 2$  は (1) の 2 式を満たす. よって  $a_1 = a_2 = 2$  となる.

必要があれば上の解法を参考にして, 自然数  $a_1, a_2, a_3$  が

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3, \quad a_1 + a_2 + a_3 = a_1 a_2 a_3$$

を満たすとき,  $a_1, a_2, a_3$  を求めよ.