

2015年 国際教養学部 第3問

3 放物線 $p: y = \frac{1}{4}x^2$ がある。点 $A(1, 1)$ から y 軸に平行な直線を引き、放物線 p との交点を点 B とする。点 B を通り、放物線 p に接する直線を l_1 とする。

(1) 点 B を通り、直線 l_1 に垂直な直線を l_2 とすると、直線 l_2 の方程式は

$$y = \boxed{\text{ク}} \quad (1) B(1, \frac{1}{4})$$

$$-2x + \frac{9}{4}$$

で表される。

$$y' = \frac{1}{2}x \text{ より, } l_1 \text{ の傾きは } \frac{1}{2}$$

$$\therefore l_2: y = -2(x-1) + \frac{1}{4} \quad \therefore y = -2x + \frac{9}{4} //$$

(2) 直線 l_2 に関して、点 A に対称な点 C の座標は、

$$(x, y) = (\boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}})$$

$$\frac{2}{5}, \quad \frac{7}{10}$$

である。

(2) $C(x, y)$ とおくと、 AC の中点は l_2 上にあるので

$$\frac{1+y}{2} = -2 \cdot \frac{1+x}{2} + \frac{9}{4} \quad \therefore 2x + y = \frac{3}{2} \dots \textcircled{1}$$

$$AC \perp l_2 \text{ より, } \frac{y-1}{x-1} = \frac{1}{2} \quad \therefore \frac{1}{2}x - y = -\frac{1}{2} \dots \textcircled{2}$$

(3) 点 B と点 C を通る直線を l_3 とすると、直線 l_3 と y 軸との交点の座標は

$$(x, y) = (0, \boxed{\text{サ}})$$

$$1$$

$$l_3: y = \frac{\frac{1}{4} - \frac{7}{10}}{1 - \frac{2}{5}}(x-1) + \frac{1}{4}$$

$$\therefore y = -\frac{3}{4}x + 1 \quad \therefore y \text{ 軸との交点は } (0, 1) //$$

①・②より、 $(x, y) = (\frac{2}{5}, \frac{7}{10}) //$

(4) 点 B とは異なる直線 l_3 と放物線 p との交点を点 D とする。点 B と点 D を通る直線と放物線 p で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{シ}}$ となる。 $\frac{125}{24}$

(5) 点 D を通る放物線 p の接線を l_4 とする。点 D を通り、接線 l_4 に垂直な直線を l_5 とする。直線 l_5 に関して、点 C に対称な点を点 E とする。点 D と点 E を通る直線の方程式は

$$x = \boxed{\text{ス}}$$

$$-4$$

で表される。

(4) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - 1 = 0$ より、

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$\therefore (x+4)(x-1) = 0$$

$$x = 1, -4$$

$D \neq B$ より、 $D(-4, 4)$

直線 BD を $y = f(x)$ とすると、

$$S = \int_{-4}^1 f(x) - \frac{1}{4}x^2 dx$$

$$= -\frac{1}{4} \int_{-4}^1 (x+4)(x-1) dx$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \{1 - (-4)\}^3$$

$$= \frac{125}{24} //$$

(5) $l_4: y = -2(x+4) + 4 \quad \therefore y = -2x - 4$

$$l_5: y = \frac{1}{2}(x+4) + 4 \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + 6$$

(2) と同様にして、

$$\frac{\frac{7}{10} + y}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{5} + x}{2} + 6 \quad \therefore x - 2y = -23 \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{y - \frac{7}{10}}{x - \frac{2}{5}} = -2 \quad \therefore 2x + y = \frac{3}{2} \dots \textcircled{4}$$

③・④より、 $E(-4, \frac{19}{2})$

$$\therefore DE: x = -4 //$$