

2014年 医学部 第2問

2 ある开区間 D で与えられた関数 $f(x)$ は、2階微分可能で、第2次導関数 $f''(x)$ は連続で、更に $f''(x) < 0$ と仮定する。以下の問いに答えよ。

(1) $a_1 < a_2 < a_3$ を満たす D の a_1, a_2, a_3 に対して

$$\frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} > \frac{f(a_3) - f(a_2)}{a_3 - a_2}$$

を示せ。

(2) x_1, x_2 を D の実数とする。 $0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす α に対して

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

を示せ。

(3) x_1, x_2, x_3 を D の実数とする。 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ 及び $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ を満たす $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ に対して

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \alpha_3 f(x_3)$$

を示せ。

(4) $D = (0, \infty)$ とする。上の議論を用いて、 D の x_1, x_2, x_3 に対して不等式

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$$

を示せ。