0002068811397999

公立はこだて未来大学

2015年 第5問

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)=|x^2-1|$ に対し，$F(a)=\int_a^{a+1} f(x)\,dx$ とする．ただし，$a>0$ とする．以下の問いに答えよ．

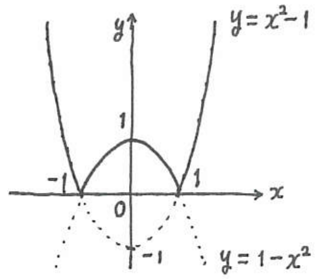
(1) 関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ．

(2) $F(a)$ を求めよ．

(3) $F(a)$ の最小値およびそのときの a の値を求めよ．

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x<-1,\ 1<x) \\ 1-x^2 & (-1\leqq x\leqq 1)\end{cases}$

より，グラフは下のようになる



(2)

(i) $0<a<1$ のとき

$$F(a)=\int_a^1 (1-x^2)\,dx+\int_1^{a+1}(x^2-1)\,dx$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_a^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^{a+1}$$

$$=1-\frac{1}{3}-a+\frac{a^3}{3}+\frac{(a+1)^3}{3}-(a+1)-\frac{1}{3}+1$$

$$=\frac{2}{3}a^3+a^2-a+\frac{2}{3}$$

(ii) $a\geqq 1$ のとき．

$$F(a)=\int_a^{a+1} x^2-1\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_a^{a+1}$$

$$=\frac{(a+1)^3}{3}-(a+1)-\frac{a^3}{3}+a$$

$$=a^2+a-\frac{2}{3}$$

(i), (ii) より，

$$F(a)=\begin{cases}\frac{2}{3}a^3+a^2-a+\frac{2}{3} & (0<a<1\ のとき) \\ a^2+a-\frac{2}{3} & (a\geqq 1\ のとき)\end{cases}$$ //

(3) $0<a<1$ において，$F'(a)=2a^2+2a-1$

$\therefore F'(a)=0$ となるのは，$a=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	(1)
$F'(a)$		$-$	0	$+$	
$F(a)$	$(\frac{2}{3})$	$\searrow$		$\nearrow$	$(\frac{4}{3})$

右の増減表より，$0<a<1$ における $F(a)$ の最小値は $F\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$

一方，$a\geqq 1$ において，$F(a)=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{11}{12}$ より 単調増加で

最小値は $F(1)=\frac{4}{3}$

以上より最小値をとるのは $a=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ ($=\alpha$ とおく) のとき．

$2\alpha^2+2\alpha-1=0$ より，$\alpha^2=-\alpha+\frac{1}{2}$ これを使って $F(\alpha)$ を計算すると

$$F(\alpha)=\frac{2}{3}\alpha^3+\alpha^2-\alpha+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\alpha\left(-\alpha+\frac{1}{2}\right)-\alpha+\frac{1}{2}-\alpha+\frac{2}{3}$$

$$=-\alpha+\frac{5}{6}$$

くり返して α の次数を下げた

よって，最小値は $\frac{8-3\sqrt{3}}{6}$ //

そのとき，$a=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ //