2015年 第6問

数理 石井K

$\boxed{6}$ 関数 $y=x^2e^{-x}$ のグラフを曲線 C とする．以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C をかけ．ただし，$x \leqq 2$ の範囲でよい．

(2) 曲線 C が直線 $y=\dfrac{1}{e}x$ に接していることを示し，その接点の座標を求めよ．

(3) 曲線 C と直線 $y=\dfrac{1}{e}x$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) $y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$
$= x(2-x)e^{-x}$

$y'' = (2-2x)e^{-x} - (2x-x^2)e^{-x}$
$= (x^2-4x+2)e^{-x}$

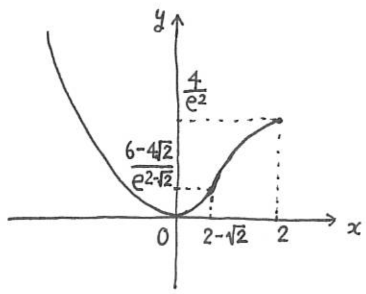
$x \leqq 2$ より，$2-x \geqq 0$ また $e^{-x} > 0$

であるから増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	2
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	↘	0	↗	$\frac{6-4\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}}$	↗	$\frac{4}{e^2}$

極小　変曲点

また $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = \infty$ であるからグラフは右のようになる



(2) C 上の点 $(t,\ t^2e^{-t})$ における接線は，

$y' = x(2-x)e^{-x}$ より，

$y = t(2-t)e^{-t}(x-t) + t^2e^{-t}$

すなわち，$y = t(2-t)e^{-t}x + (t^3-t^2)e^{-t}$ $\cdots(*)$

これが原点を通るとき，$0 = t^2(t-1)e^{-t}$

$\therefore\ t = 0,\ 1$

接線 $(*)$ の傾きが $\frac{1}{e}$ となるのは，そのうち $t=1$

$\therefore\ y=\frac{1}{e}x$ は C の $(1,\ \frac{1}{e})$ における接線であり，C と接している ▨ 接点は $(1,\ \frac{1}{e})$ //

(3) 右の図より，

$S = \int_0^1 \frac{1}{e}x - x^2e^{-x}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{e}x\,dx - \int_0^1 x^2(-e^{-x})'\,dx$

$= \left[\frac{1}{2e}x^2\right]_0^1 - \left[-x^2e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 2x(e^{-x})'\,dx$

$= \frac{1}{2e} - \left(-\frac{1}{e}\right) + \left[2xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 2e^{-x}\,dx$

$= \frac{3}{2e} + \frac{2}{e} - \left[-2e^{-x}\right]_0^1$

$= \frac{7}{2e} + \frac{2}{e} - 2$ $= \frac{11}{2e} - 2$ //