2015年 第7問

数理 石井K

$\boxed{7}$ $n=1, 2, 3, \cdots$ に対し，x の関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k=x+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

で定める．ただし，$0 \leqq x<1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\left|f_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)-f_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqq \frac{1}{1000(n+1)}$ を満たすような n の最小値を求めよ．

(2) $\lim_{n\to\infty} f_n{}'(x)$ を求めよ．

(3) n が偶数であるとき，不等式 $f_n(x) \leqq \log(x+1)$ を示せ．

(1) $f_{n+1}(x)-f_n(x)=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$

$=\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$

よって．$\left|f_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)-f_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqq \frac{1}{1000(n+1)} \iff \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right| \leqq \frac{1}{1000(n+1)}$

$\iff \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leqq \frac{1}{1000(n+1)}$

$\iff \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leqq \frac{1}{1000}$

$\iff 2^{n+1} \geqq 1000$

$\therefore$ $2^9=512<1000$，$2^{10}=1024>1000$ より，最小の n は，$\underline{n=9}$ //

(2) $f_n{}'(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}(-x)^{k-1}$

これは初項 1，公比 $-x$ $(\neq 1)$ の等比数列の和なので $\underline{\lim_{n\to\infty} f_n{}'(x)=\frac{1}{1+x}}$ //

(3) $g(x)=\log(x+1)-f_n(x)$ とおくと

$g'(x)=\frac{1}{x+1}-\sum_{k=1}^{n}(-x)^{k-1}$

$=\frac{1}{x+1}-\frac{1-(-x)^n}{x+1}$

$=\frac{(-x)^n}{x+1}$

$\geqq 0$ （$\because$ n は偶数で，$0 \leqq x<1$ より）

$\therefore$ $g(x)$ は $0 \leqq x<1$ において単調増加であり，$g(x) \geqq g(0)=0$

$\therefore$ $f_n(x) \leqq \log(x+1)$ ▨