2017年 第4問

$\boxed{4}$ m を正の整数とする．2つの整数 a, b について，a を m で割った余りと b を m で割った余りが等しいとき，a と b は m を法として合同であるといい $a \equiv b \pmod{m}$ と表す．p を素数，n を正の整数として，以下の問いに答えよ．

(1) k は p より小さな正の整数とする．${}_p\mathrm{C}_k k!$ を p で割った余りを求めよ．また，${}_p\mathrm{C}_k$ を p で割った余りを求めよ．

(2) $(n+1)^p \equiv n^p + 1 \pmod{p}$ であることを示せ．ここで，二項定理

$$(a+b)^k = \sum_{l=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_l a^l b^{k-l}$$

を証明なしに用いてよい．ただし，a, b は実数である．

(3) $n^p \equiv n \pmod{p}$ を数学的帰納法により証明せよ．

(4) 2020^{2017} を 2017 で割った余りを求めよ．ただし，2017 は素数である．