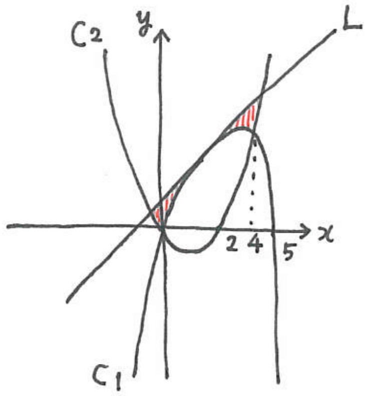
0001527902748999

自治医科大学

2010年 医学部 第25問

数理 石井K

$\boxed{25}$ 2つの放物線 $C_1 : y = -2x^2 + 10x$，$C_2 : y = x^2 - 2x$ について考える．C_1 と C_2 の相異なる2つの交点をP，Qとする．直線PQに平行で C_1 に接する直線を L とする．L と C_1 と C_2 で囲まれる面積を S としたとき，$\left(\dfrac{S}{32}+1\right)^2$ の値を求めよ．



$x^2 - 2x - (-2x^2 + 10x) = 0$ より．

$3x(x-4) = 0 \quad \therefore x = 0,\ 4$

$\therefore P(0,\ 0),\ Q(4,\ 8)$

$\therefore$ 直線PQの傾きは $\dfrac{8}{4} = 2$

C_1 において，$y' = -4x + 10$ より $-4x + 10 = 2$ となるとき．

$x = 2 \quad \therefore$ 接点は $(2,\ 12)$

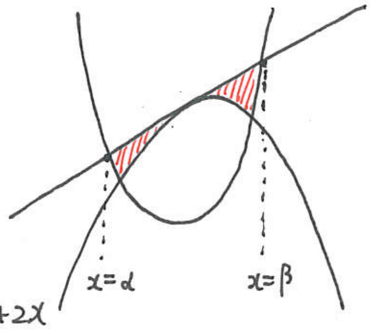
$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

使えるように

$\therefore L : y = 2(x-2) + 12$

$\therefore L : y = 2x + 8$

L と C_2 の交点の x 座標を求めると．



$x^2 - 2x - (2x+8) = 0 \quad \therefore x^2 - 4x - 8 = 0$

$\therefore x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 8}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{3}$

$\alpha = 2 - 2\sqrt{3}$，$\beta = 2 + 2\sqrt{3}$ とおくと．

$S = \displaystyle\int_\alpha^\beta 2x + 8 - (x^2 - 2x)\,dx - \int_0^4 -2x^2 + 10x - x^2 + 2x\,dx$

$= -\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx + 3\int_0^4 (x-4)\cdot x\,dx$

$= \dfrac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 - \dfrac{3}{6}\cdot(4-0)^3$

$= \dfrac{1}{6}(4\sqrt{3})^3 - 32$

$\therefore S = 32\sqrt{3} - 32$

$\therefore \left(\dfrac{S}{32}+1\right)^2 = (\sqrt{3} - 1 + 1)^2$

$= \underline{3}$ //