0002092457097999

高知工科大学

2015年 第3問　　1枚目/2枚　　数理 石井K

$\boxed{3}$ 実数 x, y に関する連立方程式

$$\begin{cases} x^3+3y=4 \\ 3x+y^3=4 \end{cases} \quad \cdots\cdots(*)$$

について，次の各問に答えよ．

(1) $(x,\ y)$ が連立方程式 $(*)$ の解であるとき，$x^3+y^3+3x+3y$ の値および $x^3-y^3-3x+3y$ の値を求めよ．

(2) 連立方程式 $(*)$ の解 $(x,\ y)$ で $x=y$ となるものをすべて求めよ．

(3) 連立方程式 $(*)$ の解 $(x,\ y)$ で $x\neq y$ となるものに対して

$$X=x+y,\quad Y=xy$$

とおく．このとき X, Y の値を求めよ．

(4) 連立方程式 $(*)$ の解 $(x,\ y)$ は全部でいくつあるか．

(1) $(*)$ の両式の各辺をたして，$\underline{x^3+y^3+3x+3y=8}$ // …①

上式から下式を引いて，$\underline{x^3-y^3-3x+3y=0}$ // …②

(2) $x=y$ のとき $(*)$ は $x^3+3x-4=0$ となるから，

$(x-1)(x^2+x+4)=0$

ここで，$x^2+x+4=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$ より，$x=1$

$\therefore$ $\underline{(x,y)=(1,1)}$ //

(3) x, y は t についての2次方程式 $t^2-Xt+Y=0$ の異なる2つの解であるから，判別式を D とすると，

$D=X^2-4Y>0$ 　よって，$X^2>4Y$ …③

①より，$(x+y)^3-3xy(x+y)+3(x+y)=8$ 　$\therefore X^3-3XY+3X-8=0$ …④

②より，$(x-y)(x^2+xy+y^2)-3(x-y)=0$ 　$\therefore (x-y)\{(x+y)^2-xy-3\}=0$

$x\neq y$ より，$X^2-Y-3=0$ 　$\therefore Y=X^2-3$ …⑤

⑤を④に代入して，$X^3-6X+4=0$

$\therefore (X-2)(X^2+2X-2)=0$ 　$\therefore X=2,\ -1\pm\sqrt{3}$

⑤により，Y もそれぞれ求めると，$(X,Y)=(2,1),\ (-1+\sqrt{3},\ 1-2\sqrt{3}),\ (-1-\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3})$

このうち，③をみたすのは，$\underline{(X,Y)=(-1+\sqrt{3},\ 1-2\sqrt{3})}$ //

2015年 第3問　　2枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 実数 x, y に関する連立方程式

$$\begin{cases} x^3+3y=4 \\ 3x+y^3=4 \end{cases} \quad \cdots\cdots(*)$$

について，次の各問に答えよ．

(1) $(x,\ y)$ が連立方程式 $(*)$ の解であるとき，$x^3+y^3+3x+3y$ の値および $x^3-y^3-3x+3y$ の値を求めよ．

(2) 連立方程式 $(*)$ の解 $(x,\ y)$ で $x=y$ となるものをすべて求めよ．

(3) 連立方程式 $(*)$ の解 $(x,\ y)$ で $x \neq y$ となるものに対して

$$X=x+y, \quad Y=xy$$

とおく．このとき X, Y の値を求めよ．

(4) 連立方程式 $(*)$ の解 $(x,\ y)$ は全部でいくつあるか．

(4) (3)より，$x \neq y$ である解 (x,y) は，t についての方程式

$t^2-(-1+\sqrt{3})t+1-2\sqrt{3}=0$ の解であるから，(異なる2つの実数解をもつことは既に確かめた)

この解を $t=\alpha, \beta$ $(\alpha<\beta)$ とすると，(2) とあわせて $(*)$ の解は

$(x,y)=(1,1),(\alpha,\beta),(\beta,\alpha)$ の $\underline{3個}$ //