名古屋市立大学

2016年 医学部 第1問

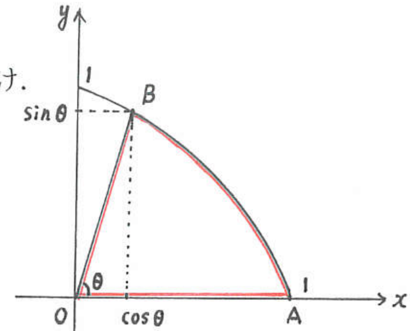
数理 石井K

$\boxed{1}$ 座標平面上の原点Oを中心とする半径1の円周上に，中心角 θ の弧ABをとる．ただし，点Aの座標を $(1,\ 0)$，$0<\theta \leqq \frac{\pi}{2}$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 扇形OABを x 軸の周りに1回転させた回転体の体積 $V_1(\theta)$ を求めよ．

(2) 扇形OABを y 軸の周りに1回転させた回転体の体積 $V_2(\theta)$ を求めよ．

(3) 体積の差 $V(\theta)=V_2(\theta)-V_1(\theta)$ を θ の関数として，そのグラフをかけ．



(1) $$V_1(\theta)=\pi\int_0^{\cos\theta}(\tan\theta\cdot x)^2\,dx+\pi\int_{\cos\theta}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2dx$$

$$=\pi\left[\tan^2\theta\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^{\cos\theta}+\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{\cos\theta}^{1}$$

$$=\pi\left(\frac{1}{3}\cos\theta\sin^2\theta\right)+\pi\left(\frac{2}{3}-\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)$$

$$=\frac{\pi}{3}\left\{\cos\theta(1-\cos^2\theta)+2-3\cos\theta+\cos^3\theta\right\}$$

$$=\underline{\frac{2}{3}(1-\cos\theta)\pi}\ //$$

(2) $$V_2(\theta)=\pi\int_0^{\sin\theta}\left(\sqrt{1-y^2}\right)^2dy-\pi\cos^2\theta\cdot\sin\theta\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\pi\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sin\theta}-\frac{\pi}{3}\cos^2\theta\sin\theta$$

$$=\frac{\pi}{3}\left\{3\sin\theta-\sin^3\theta-(1-\sin^2\theta)\sin\theta\right\}$$

$$=\underline{\frac{2}{3}\sin\theta\cdot\pi}\ //$$

(3) $$V(\theta)=\frac{2}{3}\sin\theta\,\pi-\frac{2}{3}(1-\cos\theta)\pi$$

$$=\frac{2}{3}\pi(\sin\theta+\cos\theta-1)$$

$$=\frac{2}{3}\pi\left\{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-1\right\}$$

よって，グラフは右のようになる．