0002220729777999

埼玉大学

2016年 教育・経済学部 第2問　1枚目／2枚　数理 石井K

$\boxed{2}$ a, b, c および d は実数で，$a>0$, $b<0$, $d \neq 0$ とする．また

$$f(x)=ax+b, \quad g(x)=x^2+cx+d$$

とおく．xyz 空間内に3点 P_0, P_1, P_2 があり，点Oは原点を表す．点 $P_0(-4,\ 0,\ 4\sqrt{3})$ は定点で，P_1 と P_2 はそれぞれ実数 t の値に応じて定まる点 $P_1(-t,\ f(t),\ 2\sqrt{3})$, $P_2(t,\ g(t),\ 0)$ である．この3点 P_0, P_1, P_2 が次の3条件をみたしているとき，定数 a, b, c, d の値をすべて求めなさい．

(i) $t=0$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{OP_1}$ と $\overrightarrow{OP_2}$ のなす角は $\frac{\pi}{3}$ である．

(ii) ベクトル $\overrightarrow{OP_1}$ の長さの最小値は $\sqrt{14}$ である．

(iii) 点O, P_0, P_1, P_2 は，$t=1$ および $t=-3$ のとき，それぞれ同一平面上にある．

(i)

$f(0)=b$, $g(0)=d$ より，

$t=0$ のとき，$\overrightarrow{OP_1}=(0,b,2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{OP_2}=(0,d,0)$

$\therefore |\overrightarrow{OP_1}|=\sqrt{b^2+12}$, $|\overrightarrow{OP_2}|=|d|$, $\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=bd$

$\therefore \cos\frac{\pi}{3}=\dfrac{\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}}{|\overrightarrow{OP_1}||\overrightarrow{OP_2}|}$ に代入して，$\dfrac{1}{2}=\dfrac{bd}{\sqrt{b^2+12}\cdot|d|}$

(左辺) >0 より，$d<0$ …① が分かる

両辺2乗して整理すると，$b^2=4$

$b<0$ より $b=-2$

(ii) $\overrightarrow{OP_1}=(-t,\ at+b,\ 2\sqrt{3})$ より

$$|\overrightarrow{OP_1}|=\sqrt{t^2+(at+b)^2+12}$$
$$=\sqrt{(a^2+1)t^2+2abt+b^2+12}$$

(i) より $b=-2$ なので，

$$|\overrightarrow{OP_1}|=\sqrt{(a^2+1)t^2-4at+16}$$
$$=\sqrt{(a^2+1)\left(t-\frac{2a}{a^2+1}\right)^2-\frac{4a^2}{a^2+1}+16}$$

$\therefore |\overrightarrow{OP_1}|$ の最小値は $\sqrt{\dfrac{-4a^2}{a^2+1}+16}=\sqrt{14}$　$\therefore a^2=1$

$a>0$ より $a=1$

2枚目へつづく

埼玉大学

2016年 教育・経済学部 第2問　2枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ a, b, c および d は実数で，$a>0$, $b<0$, $d \neq 0$ とする．また

$$f(x)=ax+b,\quad g(x)=x^2+cx+d$$

とおく．xyz 空間内に3点 P_0, P_1, P_2 があり，点Oは原点を表す．点 $P_0(-4,\ 0,\ 4\sqrt{3})$ は定点で，P_1 と P_2 はそれぞれ実数 t の値に応じて定まる点 $P_1(-t,\ f(t),\ 2\sqrt{3})$, $P_2(t,\ g(t),\ 0)$ である．この3点 P_0, P_1, P_2 が次の3条件をみたしているとき，定数 a, b, c, d の値をすべて求めなさい．

（i）$t=0$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{OP_1}$ と $\overrightarrow{OP_2}$ のなす角は $\frac{\pi}{3}$ である．

（ii）ベクトル $\overrightarrow{OP_1}$ の長さの最小値は $\sqrt{14}$ である．

（iii）点O, P_0, P_1, P_2 は，$t=1$ および $t=-3$ のとき，それぞれ同一平面上にある．

(iii) (i), (ii) より

$\overrightarrow{OP_1}=(-t,\ t-2,\ 2\sqrt{3})$

点O, P_0, P_1, P_2 が同一平面上にあるとき

$\overrightarrow{OP_2}=p\overrightarrow{OP_0}+q\overrightarrow{OP_1}$ （p, q は実数）と表せるから

$t=1$ を代入して

$(1,\ 1+c+d,\ 0)=p(-4,0,4\sqrt{3})+q(-1,-1,2\sqrt{3})$

$$\begin{cases} 1=-4p-q & \cdots ② \\ 1+c+d=-q & \cdots ③ \\ 0=4\sqrt{3}p+2\sqrt{3}q & \cdots ④ \end{cases}$$

②～④より $p=-\frac{1}{2}$, $q=1$, $c+d=-2 \cdots ⑤$

$t=-3$ を代入して

$(-3,\ 9-3c+d,\ 0)=p(-4,0,4\sqrt{3})+q(3,-5,2\sqrt{3})$

$$\begin{cases} -3=-4p+3q & \cdots ⑥ \\ 9-3c+d=-5q & \cdots ⑦ \\ 0=4\sqrt{3}p+2\sqrt{3}q & \cdots ⑧ \end{cases}$$

⑥～⑧より，$p=\frac{3}{10}$, $q=-\frac{3}{5}$, $-3c+d=-6 \cdots ⑨$

⑤, ⑨より $c=1$, $d=-3$

以上より，$\underline{a=1,\ b=-2,\ c=1,\ d=-3}$ //